



# Kutatói pályára felkészítő akadémiai ismeretek modul

## Környezetgazdálkodás Modellezés, mint módszer bemutatása

### KÖRNYEZETGAZDÁLKODÁSI AGRÁRMÉRNÖK MSC



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg



# Modellek általános jellemzői I.

Modell definíciója, hasonlóság

9. lecke



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg



# Bevezetés

- Modell: latin eredetű szó
- A modell szót, fogalmat az élet számos területén alkalmazzák:
  - Különböző rendszerekben végbemenő folyamatokat vizsgálnak a segítségével (víztisztítás, szennyvíztisztítás).
  - Közlekedési eszközök kicsinyített mását is modellnek nevezzük.
  - Az építészet egyik nélkülözhetetlen eszköze.
  - Ezenkívül a különböző modelleknek az oktatásban, valamint a technikai vívmányok (atomenergia) tervezésében is nagy szerepe van.





- Nem szabad elfelejteni, hogy a modell önmagában nem létezik. Úgy lehetséges csak használni és felállítani, ha valamihez viszonyítunk, valamint egyfajta logikai sorrendet követ. Nem szabad azt sem elfelejteni, hogy megfelelő kiindulási ismeret, adat nélkül a modellünk nem a valósághoz közeli állapotot fogja tükrözni, amely az eredeti célja lenne.
- Például:
  - Egy növény válaszát csak úgy tudjuk modellezni egy adott környezeti feltétel megváltozására, ha rendelkezünk előzetes ismeretekkel.





## Modell definíciója

- Egységes definíciót a modellre nem tudunk adni. „Ahány ház annyi szokás” ha végignézzük az összes tudományágat, hogy hogyan értelmezi a modell fogalmát. Bármilyen modell egy információt adó rendszer.
- Például:
  - Irodalomban és képzőművészetben: olyan személy, (ritkán) állat vagy tárgy, aki, amely minta(kép) valamely művészi alkotás megteremtéséhez.
  - Valaminek meghatározott méretarányban kicsinyített mása;
  - Műszaki berkekben: öntvény gyártásához használt, különféle anyagokból készített forma





## Modell szinonimái

- Számos szinonimát találunk a modell szó használatára, azonban nem okoz különösebb zavart a hallgató számára.
- Például:
  - Agyag-forma
  - Axiómarendszert kielégítő matematikai objektumok rendszere
  - Folyamat, szemléltető leírás
  - Forma, formula képlet, leképezés, makett, matematikai leírás, matematikai kifejezés, minta, mintadarab
  - Ruhaminta séma: szabásminta





## Modell célja

- Stoff szerint a modell: *“eszmeileg elképzelt vagy anyagilag realizált rendszer, amely visszatükrözve vagy reprodukálva a kutatás objektumát képes helyettesíteni”*
- „célja az emberi megismerési folyamat elősegítése, újabb ismeretek szerzése”
- Időmegtakarítás (pl.: gyógyszerkutatás)
- Költséghatékonyság növelése (pl.: vegyipar)
- Folyamatok biztonságának ellenőrzése (pl.: atomenergia felhasználása), optimalizálása (pl.: szennyvíztelep működésének ideálissá tétele), előrejelzése (pl.: klímaváltozás meghatározása)





# Hasonlóság

- 2 részre bonthatjuk:
  1. A hétköznapi értelemben gyakran beszélünk hasonlóságról. Hasonlónak tekintünk valamilyen tárgyat, élőlényt a részben ill. teljes mértékben megegyező tulajdonsága alapján.
  2. A tudományos értelmezésben valamely objektum-, tárgyrendszer képe közötti összefüggésként értelmezi a hasonlóságot.
- A modelleknek a kiindulási feltétele, hogy a modell és a modellezett között kapcsolatot találjunk, vagyis ezek hasonlóak legyenek egymáshoz.







## Hasonlóság matematikai értelmezése

- A és B halmaz közötti morfizmus (reláció) típusai:
- Izomorfizmus: olyan bijektív leképezés, amely az **A** halmazt a **B** halmazra úgy képezi le, hogy minden **A** és **B** halmazban lévő elemnek van a másik halmazban megfelelője:  $\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow \exists y \in \mathbf{B} \wedge \forall y \in \mathbf{B} \Rightarrow \exists x \in \mathbf{A}$
- A bijektív leképezések kölcsönösen egyértelmű ráképezések. A bijekció olyan megfeleltetést létesít két halmaz között, aminél az egyik halmaz minden egyes elemének a másik halmaz pontosan egy eleme felel meg, és fordítva.





- Homomorfizmus: ha az A halmazt a B halmazba képezi le, vagyis minden A-beli elemnek van a B-ben megfelelője, de fordítva már nem
- Automorfizmus: ha önmagára izomorf
- Hasonlósági reláció reflexív:
  - Egy objektum önmagához (ugyanabban az időpontban) nyilvánvalóan minden szempontból hasonló:  $a \rho a$
- Hasonlósági reláció szimmetrikus:
  - Bármelyik objektum tulajdonságaiból a másokra következtetéseket tudjunk meghatározni:  $a \rho b \rightarrow b \rho a$





- Általában a modellből a modellezettek egész csoportjára kell következtetnünk, vagyis úgy tekintjük a modellt, mint az egymáshoz hasonló elemek halmazának egyik reprezentáns elemét. Legyen pl. az  $a, b, c$  elemekből álló halmazunk. Ha ezek hasonlóak, akkor bármely két elem között szimmetria relációnak kell fennállnia, hiszen bármelyik elem lehet reprezentáns (modell):

$$a \rho b \rightarrow b \rho a,$$

$$b \rho c \rightarrow c \rho b,$$

$$c \rho a \rightarrow a \rho c.$$





- Ebből viszont az is következik, hogy az így értelmezett hasonlósági reláció tranzitív is:
- $a \rho b$  **ÉS**  $b \rho c$   $\rightarrow a \rho c$ .
- Szükséges tehát, hogy a hasonlósági reláció
  - reflexív,
  - szimmetrikus és
  - tranzitív,vagyis *ekvivalencia* reláció legyen.





- Könnyen belátható, hogy a nem tranzitív relációk téves következtetések forrásai lehetnek.
- De téves következtetésekre juthatunk akkor is, ha a modell és a modellezett különbözőségét figyelmen kívül hagyjuk, ha a modellezett olyan tulajdonságaira is következtetni akarunk, amelyek szerint azok nem hasonlóak.
- Vonatkozik ez nemcsak az objektumok modellezésére, hanem mindennapi gondolkodásunkra is.





# Modellek általános jellemzői II.

10. lecke



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg



# Hasonlóság és az emberi elme kapcsolata

- Az ember a hétköznapi életben mindig megpróbál valamit valamihez hasonlítani a jobb megértés, és a könnyebb azonosítás érdekében. A folyamat során megpróbálja halmazokba rendezni a körülötte levő világot.
- Halmazba rendezés lehetőségei:
  - Felsorolni az adott halmazba tartozó elemeket (megadni a halmaz extenzióját), vagy
  - Rögzíteni azokat a kritériumokat, amelyek alapján bármiről eldönthető, hogy a halmazba tartozik vagy sem (megadni a halmaz intenzióját, vagyis definícióját).





- A modellezés során mindig a hasonlósági tulajdonságokat előre rögzíteni kell. Azonban ez nem azt jelenti, hogy minden áron minden lehetséges tulajdonságot rögzíteni kell.
- Ez az jelenti, hogy egyfajta „állapotteret” kell definiálni a modell felállítása során. Azonban a megfelelő állapottér felállítása nagymértékben befolyásolja a modelltől származó eredmény helyességét ill. helytelenségét.
- Szükséges lehatárolni a folyamat szempontjából kulcskérdésű tulajdonságokat, a mellékeseket pedig kihagyni. Ezen tulajdonságok hova tartozásának megítélése és meghatározása sokszor fáradságos és hosszú időt igénylő munka lehet.







Az emberi gondolkodás során az analógiáknak az idők folyamán rendkívül fontos szerepe volt:

- Descartes az élőlényeket is mechanikai (gép) analógiával magyarázta.
- Newton vizsgálatait arra az axiómájára alapozza, hogy *“a természet hasonló jelenségeinek hasonló okai vannak”*.
- Maxwell a folyadékáramot használta az elektromos áram szemléltetésére.
- Fourier a hő áramot szintén a folyadékárammal szemléltette.



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg



- A tudomány nemcsak felhasználja az analógiákat, hanem foglalkozik a jelenségek hasonlósági feltételének megfogalmazásával is. Mindig próbál minden folyamatot valamely nagyobb folyamatrendszerhez kapcsolni.
- Például:
  - Newton fogalmazta meg két szilárd test hasonló mozgásának feltételeit.
  - Fourier (1822) hívta fel a figyelmet arra, hogy a fizikai jelenségeket leíró egyenletek tagjai azonos dimenziójúak (dimenzionális homogenitás).
  - Kirpicsov (1874) foglalkozott a geometriailag hasonló testekben végbemenő rugalmas jelenségekkel.





## A hasonlósági reláció

- Hasonlósági reláció: a modell és a modellezett közötti kapcsolat.
- 100%-os egyezés nem lehet a modell és a modellezett között vagyis teljes modell, mert ebben az esetben a modell megegyezik a modellezettel. Ezért a modell és a modellezett viszonya között csak részleges kapcsolat lehetséges, vagyis csak bizonyos tulajdonságban egyezhetnek meg.
- A fentiekből kell konkrétan definiálni a hasonlóságokat és a különbségeket, ellenkező esetben hibás analógiát vonhatunk le.





## A hasonlósági szempontok főbb típusai

- 3 típusát különböztethetjük meg:
  - Szerkezeti (vagy strukturális)
  - Működési (vagy funkcionális) és
  - Formai (vagy geometriai, tágabb értelemben: topológiai) hasonlóság.
- Ugyanazon rendszerhez a struktúra vagy a geometria vagy a funkció szerint más-más rendszerek hasonlóak: a strukturális, a funkcionális és a geometriai hasonlóság halmazai egymásnak nem részalmazai.
- Például: Lehet két rendszer geometriailag hasonló (pl. egy gépkocsi és annak makettje), anélkül, hogy funkcionálisan hasonlóak legyenek.





# Geometria és a működés (funkció) közötti ellentmondás

- Az élőlények mozgékonyága többek között az izomerő és a test tömegének viszonyától függ. Az izomerő az izom keresztmetszetével, tehát az lineáris méretek négyzetével, a tömeg pedig a térfogattal, vagyis a lineáris méretek köbével arányos.
- Az állatok méreteinek növekedésével a csontjaikra ható súly nem a tömegnek megfelelő harmadik hatványon, hanem - a hajlítóerő következtében - a negyedik hatványon növekszik.





# Geometria és a működés (funkció) közötti ellentmondás példa

- A bolha kb. 1 m magasra ugrik. Milyen magasra ugrana a bolha, ha ember nagyságú volna?
- Az “eredeti” ugrás  $h$  magassága az erő és a tömeg hányadosával arányos.
- Ha az állat minden méretét  $c$ -szeresére növeljük, akkor geometriailag hasonló lényt hoztunk létre, amelynek ugrási magassága  $h' = h/c$ , vagyis  $c$ -szeresére csökken!  
Az ember nagyságú bolha az eredeti állatnál kb. ezerszeresen nagyobb. Az ilyen állat ugrási magasságának nagyságrendje az eredeti  $m$  helyett csupán  $mm$  lenne.





- Hibás következtetésekre jutnánk tehát, ha a modellezésnél mindenkor a geometriai hasonlóságot tekintenénk meghatározó szempontnak.
- Csak matematikai módszerekkel lehet a folyamatok, rendszerek hasonlóságának szükséges és elégséges feltételét meghatározni.





# Köszönöm a figyelmet!



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg