GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

2. hét

Abszolútértékes feladatok és geometriai alapok

Lovics Gábor

Abszolútérték

Alapfogalmak

1. Definíció
Legyen $f(x)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor a $g(x) = |f(x)|$ jelentése:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & ha \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & ha \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Az abszolútértékes feladatok megoldásánál tipikusan az abszolútérték definícióját kell használni. Először megállapítjuk, hogy az abszolútértékben szereplő kifejezés mikor nagyobb, illetve kisebb, mint nulla, és a kapott intervallumokon külön-külön oldjuk meg a feladatot, $f(x)$-et, illetve $-f(x)$-et használva.

Feladatok

Oldd meg a következő egyenleteket!

1. $|2x + 3| - 1 = |2x^2 - x - 1|$
2. $(3|x| - 3)^2 = |x| + 7$
3. $x^2 - |5x + 8| > 0$

Megoldások

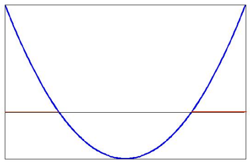
1. A feladat két abszolútértékes kifejezést is tartalmaz. Ehhez megint érdemes egy olyan ábrát készíteni, ami az abszolútértékben lévő kifejezés előjelét tertalmazza. Kezdjük a bal odallal:

$$2x + 3 \geq 0$$
$$x \geq -\frac{3}{2}.$$

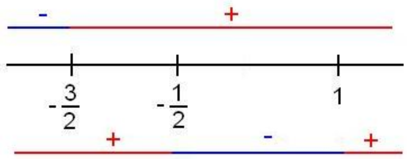
A jobb oldal:

$$2x^2 - x - 1 \geq 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

A másodfokú egyenlőtlenség tehát a korábban tárgyalt esetek közül megint az elsőbe sorolható.



Tehát a jobb oldal nemnegatív, ha $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; \infty)$.



1. eset: $x < -\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} -2x - 3 - 1 &= 2x^2 - x - 1 \\ 2x^2 + x + 3 &= 0 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12}}{4} &= \dots \end{aligned}$$

2. eset: $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$ vagy $1 < x$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 - 1 &= 2x^2 - x - 1 \\ 2x^2 - 3x - 3 &= 0 \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{4} &= \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}. \end{aligned}$$

A két gyök eleme a megfelelő halmaznak, ezért találtunk két megoldást.

3. eset: $-\frac{1}{2} < x \leq 1$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 - 1 &= -2x^2 + x + 1 \\ 2x^2 + x + 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4}. \end{aligned}$$

Tehát a feladat megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

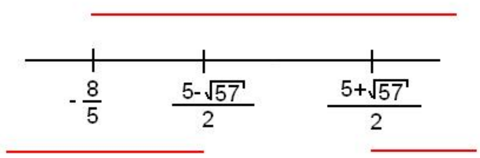
2. Ebben a feladatban az $|x|$-et úgy kell kezelni, mint egy változót.

$$\begin{aligned} (3|x| - 3)^2 &= |x| + 7 \\ 9|x|^2 - 18|x| + 9 &= |x| + 7 \\ 9|x|^2 - 19|x| + 2 &= 0 \\ |x|_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 72}}{18} &= \frac{19 \pm 17}{18} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Tehát a megoldás:

$$x \in \{-2; -\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; 2\}.$$

3. Az egyenlőtlenségeket lényegében ugyanazzal az esetszétválasztással kell megoldanunk, amit már korábban az egyenleteknél láttunk.
$$x^2 - |5x - 8| > 0$$
Elsőnek tehát azt vizsgáljuk, hogy az a kifejezés, amelynek az abszolútértékét vettük, mikor vált előjelet:
$$\begin{aligned} 5x - 8 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{8}{5}. \end{aligned}$$
1. eset: $x \geq -\frac{8}{5}$
$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 8 &> 0 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2} &= \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}. \end{aligned}$$
Az első eset megoldása tehát:
$$\left[-\frac{8}{5}; \frac{5 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2}; \infty\right)$$

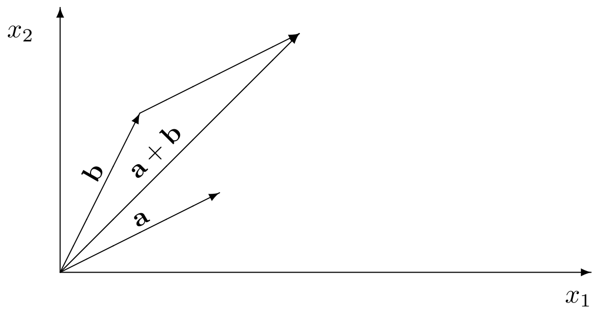


2. eset: $x < -\frac{8}{5}$
$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 8 &> 0 \\ x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} &= \ldots \end{aligned}$$
Ez alapján a másodfokú kifejezés mindig nagyobb, mint nulla. Ezért a második eset megoldása:
$$x \in \left(-\infty; -\frac{8}{5}\right).$$
A feladat teljes megoldása tehát:
$$\left(-\infty; -\frac{8}{5}\right) \cup \left[-\frac{8}{5}; \frac{5 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2}; \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2}; \infty\right).$$

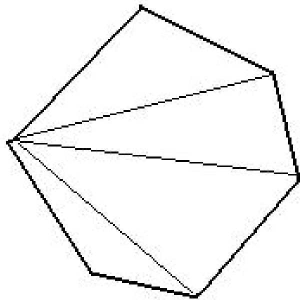
Elemi geometria

Általános háromszögek

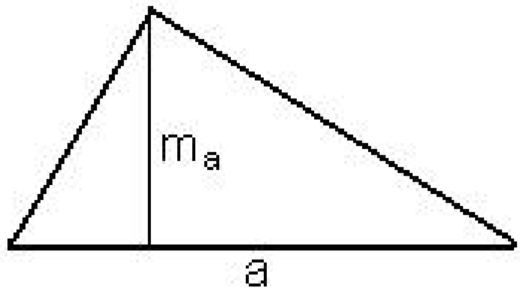
A háromszög három oldalából bármely kettő hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza. Ezt az összefüggést háromszög-egyenlőtlenségnek nevezzük. Mivel $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok háromszöget alkotnak, ezért
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$



A háromszögek belső szögeinek összege 180°. Mivel egy általános n szög mindig felbontható $(n-2)$ db olyan háromszöggé, amelyek belső szögeinek összege megegyezik az n szög belső szögeinek összegével, ezért egy n szög belső szögeinek összege: $(n-2)180°$.

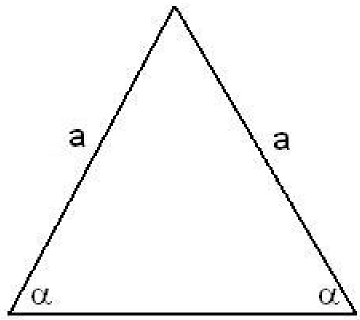


A háromszögek területe a következő képlettel számolható ki: $T = \frac{am_a}{2}$.

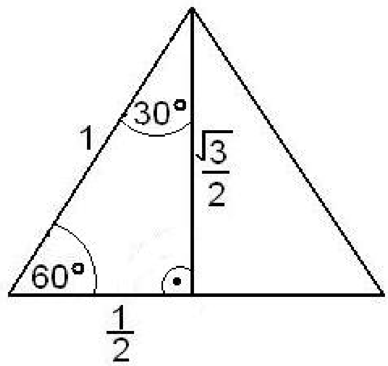


Speciális háromszögek

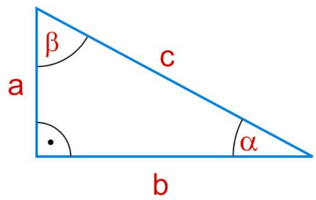
Egyenlő szárú háromszög



Egyenlő oldalú háromszög



Derékszögű háromszög



Derékszögű háromszögben igaz a Pitagorász-tétel: egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha létezik két olyan oldala (a és b), melyek hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal (c) hosszának négyzetével. Vagyis

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Igaz továbbá a Thálesz-tétel, mely szerint egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha három csúcsából kettő egy kör átmérőjének végpontja, a harmadik pedig a körön található.

A kör

A kör egy ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra (sugár) lévő pontok halmaza. Legyen a kör sugara r, ekkor a kör kerületének és területének képlete:

$$K = 2r\pi; \quad T = r^2\pi.$$

A kör tetszőleges pontjához húzott sugár és érintő mindig merőleges egymásra.