GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

3. hét

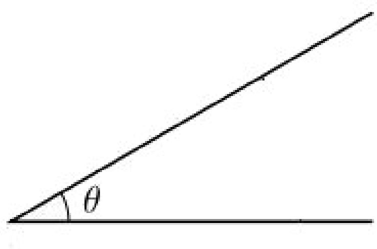
Trigonometria

Lovics Gábor

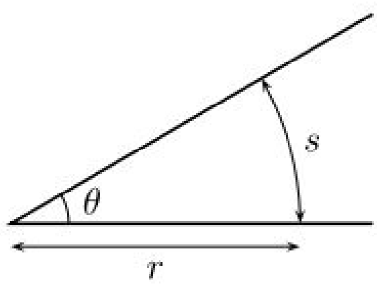
Szögek

A szögek értelmezése

1. Definíció
A sík egy pontjából (szög csúcsa) induló két félegyenest (szárak) szögnek hívunk. A szög jelentheti a félegyenesek által határolt síkszeletet (szögtartomány), illetve a félegyeneseket is (szögvonal). Azt, hogy a két szögtartomány közül melyikről van szó, a szárak közé rajzolt körívvel jelezzük. Amennyiben a szög forgást jelöl, forgásszögekről beszélünk. Ebben az esetben értelmes előjeles szögről beszélni, a pozitív előjel az óramutató járásával ellentétes forgásirányt jelöli.



Mértékegységek
A θ szög méréséhez egy körívet húzunk, melynek középpontja a szög csúcsa. Legyen a körív hossza s, a kör sugara pedig r. Ekkor a szög radiánban való mértékét az $\frac{s}{r}$ hányados mutatja meg. A teljes kör mértéke 2π. A radián szög mértékegysége a rad, amit általában nem írunk ki. A szög fokokban való méréséhez a radián szögünket $\frac{180}{\pi}$-vel kell szoroznunk. Így a teljes kör mértéke 360° lesz.



Trigonometrikus függvények

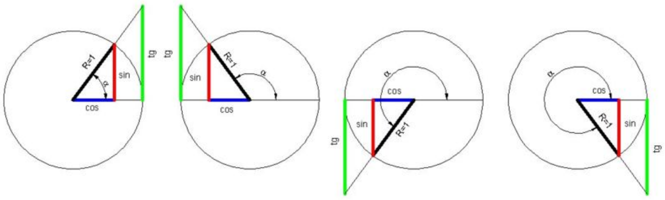
Definíciók

2. Definíció
Vegyük egy koordináta-rendszerben az $(1,0)$ vektort, és forgassuk el α szöggel. Az így kapott vektor első koordinátáját nevezzük $\cos\alpha$-nak, a második koordinátáját pedig $\sin\alpha$-nak. Legyen α olyan, melyre teljesül, hogy $\cos\alpha \neq 0$. Ekkor:

$$\tan\alpha = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Legyen α olyan, melyre teljesül, hogy $\sin\alpha \neq 0$. Ekkor:

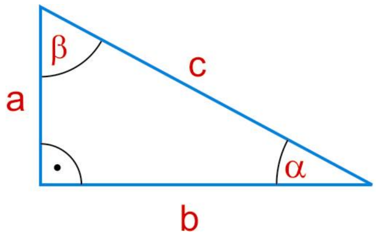
$$\cot\alpha = ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



Hegyes szögek szögfüggvényei

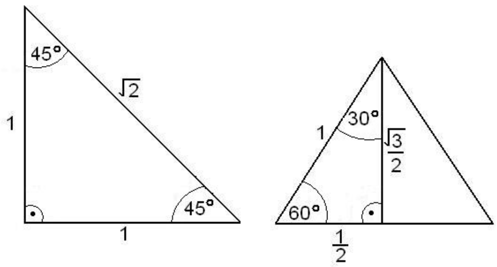
Legyen adott egy derékszögű háromszög, melyben az egyik befogó és az átfogó által bezárt szög α. Az α-val szemközti oldal legyen a, a másik befogó b, az átfogó pedig c. Ekkor a következő összefüggések teljesülnek:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



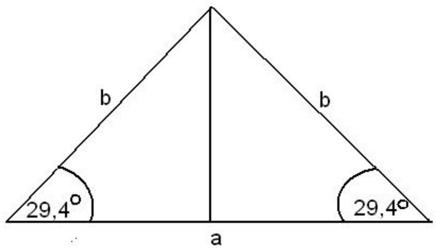
Nevezetes szögek szögfüggvényei

α	sin	cos	tg	ctg
$0°$	0	1	0	-
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	1	0	-	0



Példa trigonometrikus összefüggések alkalmazására

Mekkorák annak az egyenlőszárú háromszögnek az oldalai, melynek az alapja 30,4 cm-rel hosszabb a száraknál, és amelyiknek az alapon fekvő szögei $29,4°$-ak?
Megoldás



A feladat felrajzolásakor érdemes berajzolni az alaphoz tartozó magasságot. Ekkor ez a magasság, az eredeti háromszög egyik szára (b) és az alapjának a fele $\left(\frac{a}{2}\right)$ egy derékszögű háromszöget alkot. Erről a háromszögről a feladat szövege és az ábra alapján tudható, hogy

$$a - b = 30,4$$
$$cos 29,4° = \frac{a}{2b}.$$

Meghatározva a $29,4°$ koszinuszát a második egyenletből kapjuk, hogy

$$0,87 = \frac{a}{2b}$$
$$a = 1,74b.$$

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy

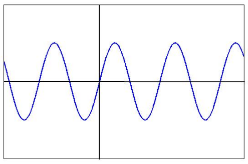
$$1,74b - b = 0,74b = 30,4$$
$$b = 41.$$

Ebből kapjuk hogy

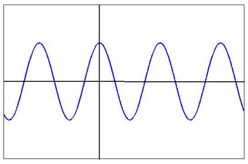
$$a = 41 + 30,4 = 71,4.$$

Trigonometrikus függvények grafikonjai

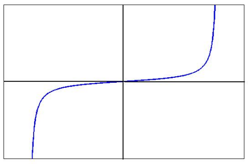
$sinx$



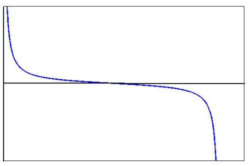
$\cos x$



$\mathrm{tg} x$

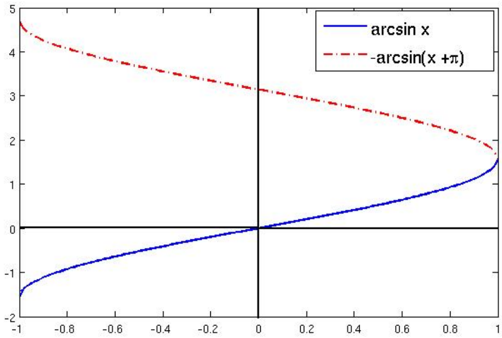


$\mathrm{ctg} x$

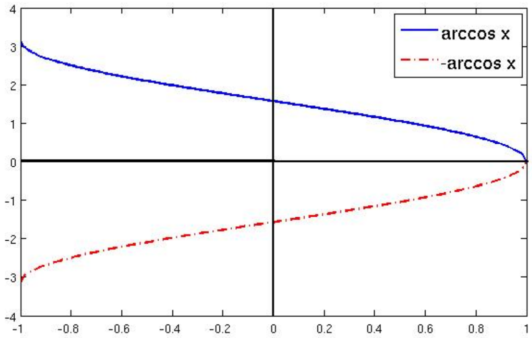


Trigonometrikus függvények inverze

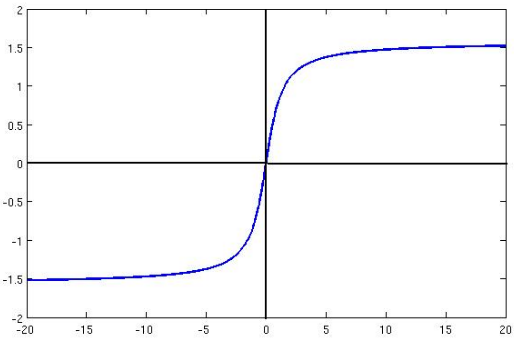
Emlékezzünk vissza, hogy az $f(x) = x^2$ függvénynek sem volt inverze a valós számok halmazán. Viszont, ha az értelmezési tartományát megszorítjuk a nemnegatív számok halmazára, akkor már invertálható függvényt kapunk, amelynek így az értékkészlete lett a nemnegatív számok halmaza. A trigonometrikus függvények inverze is hasonló trükkel értelmezhető. Mivel periódikus függvényekről van szó, ezért először is azt kell eldöntenünk, hogy melyik periódusra szorítjuk meg az értelmezési tartományt. Mivel a szinusz és a koszinusz függvények egy perióduson belül sem kölcsönösen egyértelmű hozzárendelések, ezért a perióduson belül is meg kell szorítsuk a függvényt. A szinusz függvényt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz szinusz függvénynek hívjuk, jele: $\arcsin x$, értelmezési tartománya a $[-1; 1]$, értékészlete pedig a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



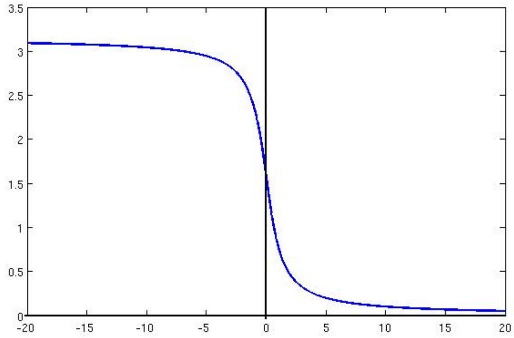
Ha a függvényt a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumra szorítjuk meg, és úgy invertáljuk, akkor $-\arcsin x$ függvényhez jutunk. A koszinusz függvényt a $[0; \pi]$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz koszinusz függvénynek hívjuk, jele: $\arccos x$, értelmezési tartománya a $[-1; 1]$, értékkészlete pedig a $[0; \pi]$.



A tangens függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz tangens függvénynek hívjuk, jele: $\mathrm{arctg} x$, értelmezési tartománya a $(-\infty; \infty)$, értékkészlete pedig a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



A kotangens függvényt a $(0; \pi)$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz kotangens függvénynek hívjuk, jele: $\mathrm{arcctg} x$, értelmezési tartománya a $(-\infty; \infty)$, értékkészlete pedig a $[0; \pi]$.


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

Deriválási szabályok

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \cos x \quad\quad x \in \mathbb{R} \\
\cos' x &= -\sin x \quad\quad x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{tg}' x &= \frac{1}{\cos^2 x} \quad\quad k\pi + \frac{\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z} \\
\mathrm{ctg}' x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \quad\quad k\pi \neq x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z} \\
\arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\quad x \in [-1;1] \\
\arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\quad x \in [-1;1] \\
\mathrm{arctg}' x &= \frac{1}{1+x^2} \quad\quad x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{arcctg}' x &= -\frac{1}{1+x^2} \quad\quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Polárkoordinátás alak

Vektorok polárkoordinátás alakja

Legyen adva egy $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ vektor. Ez a vektor kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy $(r; \phi) \in \mathbb{R}_\oplus \times [0; 2\pi]$ úgynevezett polárkoordinátákkal adott vektornak. A megfeleltetést a következő szabályok írják le. Ha $(x_1; x_2)$-t ismerem, akkor

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
\phi &= \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\
\phi &= \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},
\end{aligned}$$

ahol a második két egyenletre azért van szükség, mert a $[0, 2\pi]$ intervallumban a két egyenlet együttesen hatátozza meg ϕ-t. Visszafelé, ha (r, ϕ) ismert, akkor

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \phi, \\
x_2 &= r \sin \phi.
\end{aligned}$$

Polárkoordináták kiszámítása a gyakorlatban

Határozzuk meg a $(2, 3)$ vektor polárkoordínátás alakját! Ehhez először is ki kell számoljuk a vektor hosszát

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Ezután határozzuk meg a vektorhoz tartozó hajlásszöget. Ezt a gyakorlatban kicsit máshogy érdemes kiszámolni, mint ahogy azt a fenti képlet mutatja. Használjuk, ki hogy

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{3}{2}.$$

Ekkor $\phi = 56,31°$ vagy $\phi = 263,31°$. Mivel a szög nyilván az első síknegyedben van, ezért $\phi = 56,31°$.