GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

6. hét

Lineáris leképezések

Lovics Gábor

Függvényekkel kapcsolatos fogalmak

Függvények

Korábban mindenki találkozott $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós fügvényekkel. Ezeket az egyértelmű hozzárendeléseket, leképezéseket azonban nem csak valós számok között érdemes használni. Előfordulnak többváltozós függvények, melyeket vektorváltozós függvényeknek is tekinthetünk ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). A leképezések fogalmát ennél általánosabban is érdemes használnunk. Gondoljunk például a deriválásra, amely olyan egyértelmű hozzárendelés, ami függvényekhez rendel függvényeket. Vagy mondjuk rajzoljunk egy tengelyt a síkra, és tükrözzük rá a vektorokat, akkor egy olyan egyértelmű hozzárendelést kapunk, ami vektorokhoz rendel vektorokat. Egyes függvények speciális tulajdonságokkal is rendelkeznek. Először a függvényekkel kapcsolatban néhány általános fogalmat tisztázunk. Egy függvényt akkor definiáltunk, ha megadtuk az értelmezési tartományát, és a hozzárendelési szabályt. Ezért, amikor azt mondjuk, hogy adva van két halmaz A és B és $f: \quad A \to B$ függvény, akkor A-t a fügvény értelmezési tartományának tekintjük. A B halmaz azonban nem feltétlenül a függvény értékészlete, mert előfordulhat, hogy B-nek van olyan eleme, ami nem elme a függvény értékkészletének.

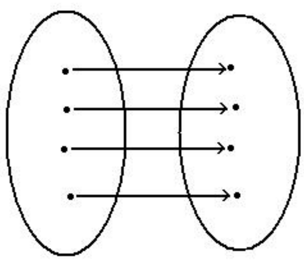
1. Definíció
Legyen A, B két tetszőleges halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $f: \quad A \to B$ injektív leképezés, ha $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$.

2. Definíció
Legyen A, B két tetszőleges halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $f: \quad A \to B$ szürjektív leképezés, ha f értékkészlete B.

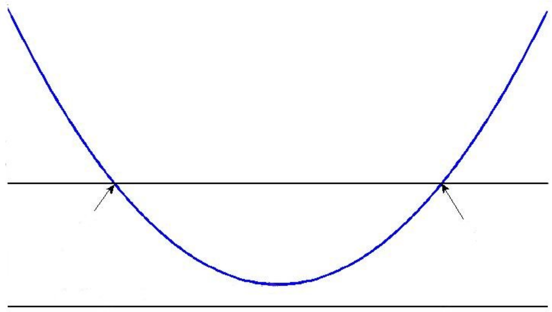
3. Definíció
Legyen A, B két tetszőleges halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $f: \quad A \to B$ bijektív leképezés, ha injektív és szürjektív.

Bijekcióról szemléltetés

Ha két halmaz között találtunk egy bijekciót, az lényegében azt jelenti, hogy a két halmaz elemeit össze tudtuk párosítani.



Látni fogjuk, hogy ha két halmaz között létezik bijekció, az azt jelenti, hogy a két halmaz lényegében ugyanúgy viselkedik. Azt is megmutatjuk, hogy az, hogy egy függvény bijekció-e, nem csak az f hozzárendelési szabálytól függ, hanem attól is, hogyan választjuk meg az A és B halmazt. Ha ismerjük egy valós függvény grafikonját, akkor arról úgy tudjuk megállapítani, hogy bijektív-e, ha vízszintes vonalakat húzunk a B halmaz elemei mentén. Ha azt tapasztaljuk, hogy az egyenes két helyen is elmetszi a függvényt, akkor ez azt jelenti, hogy a függvény nem injektív. Ha nem metszi el sehol, akkor a függvény nem szürjektív. Ha bárhol is húzom be az egyenest, és az mindenhol pontosan egy helyen metszi el a függvényt, akkor beszélhetünk bijekcióról. Vegyük például az $f(x) = x^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ez nem is injektív és nem is bijektív függvény. A nemnegatív számok között azonban már bijekció.



Lineáris leképezések fogalma

Lineáris leképezés

4. Definíció
Legyen T felett V és U vektortér, és $\phi : V \to U$ leképezés közöttük. A ϕ hozzárendelést (homogén) lineáris leképezésnek nevezzük, ha tetszőleges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$\phi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \phi(\mathbf{v}_1) + \phi(\mathbf{v}_2)$$
$$\phi(\lambda \mathbf{v}_1) = \lambda \phi(\mathbf{v}_2).$$

Lineáris leképezések tulajdonságai

1. Tétel
Legyen T felett V és U vektortér és $\phi : V \to U$ lineáris leképezés. Jelölje $\mathbf{0}_V$ a V, $\mathbf{0}_U$ az U tér nullelemét, és legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in T$. Ekkor

$$\phi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$$
$$\phi(-\mathbf{v}_1) = -\phi(\mathbf{v}_1)$$
$$\phi(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \lambda_1 \phi(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 \phi(\mathbf{v}_2) + \cdots + \lambda_n \phi(\mathbf{v}_n)$$

Példák lineáris leképezésre

1. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix. Ekkor a $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mint $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezés lineáris.
2. A sík vektorai között egy origón átmenő egyenesre való tükrözés, az origó körüli forgatás és az x tengelyre való levetítés mind lineáris leképezések.
3. Az $f(x) \to f'(x)$ hozzárendelés a folytonosan deriválható függvények terében.
4. Az $a_n \to a_n - a_{n-1}$ hozzárendelés lineáris a sorozatok között.

5. Legyen $s = a_n$ sorozat, ekkor a rajtuk értelmezett $\phi(s) = a_{n-1}$ leképezés lineáris.
6. Legyen V az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények halmaza, U pedig $\mathbb{R}$, ekkor a
$$\phi(f) = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
leképezés lináris.

Feladat

Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy lineárisak-e.

1. Legyen $\phi : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés a következő: $\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.
2. Legyen $\psi : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés a következő: $\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$.

Megoldás

1. Ahhoz, hogy egy leképezésről azt bizonyítsuk, hogy lineáris-e, a definícióban szereplő két tulajdonságot kell leellenőriznünk.
$$\phi\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$
2. Ahhoz, hogy egy leképezésről megmutassuk, hogy nem lineáris, gyakran elegendő a lineáris leképezés tulajdonságait felhasználni. Ha ψ lineáris leképezés lenne, akkor nullvektor képe nullvektor lenne. Azonban
$$\psi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Képtér és magtér

5. Definíció

Legyen V és U vektorterek T felett és ϕ $V \to U$ lineáris leképezés. Ekkor a függvény képterén
$$Im\phi = \{\mathbf{u} \in U | \exists \mathbf{v} \in V,\ \phi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\}$$
halmazt értjük. A függvény magterén pedig
$$Ker\phi = \{\mathbf{v} \in V | \phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_U\}$$
halmazt értjük.

2. Tétel

Legyen V és U vektorterek T felett és ϕ $V \to U$ lineáris leképezés. Ekkor $Ker\phi$ altere V-nek és $Im\phi$ altere U-nak. Ha még az is teljesül, hogy U és V véges dimenziós vektorterek, akkor
$$dim(Ker\phi) + dim(Im\phi) = dimV.$$

Feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, és vizsgájuk meg az $A\mathbf{x}: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést. Mi ennek a leképezésnek a magtere? Mit tudunk ez alapján mondani az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet megoldhatóságáról?

Megoldás

A magtér vizsgálathoz az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet vizsgálata szükséges. Ez a következő alakban írható fel:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Ha a két egyenletet összeadjuk, azt kapjuk, hogy $x_1 = 0$. A két egyenletbe ezt visszahelyetesítve azt kapjuk, hogy $x_2 = x_3$ kell legyen. Vagyis az egyenletrendszert megoldó minden vektor előáll $\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix}$ alakban, ahol x tetszőleges valós szám. Az ilyen alakú vektorok egydimeziós vektorteret alkotnak, mert a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor nyilván generálja az összes ilyen vektort. Ez alapján $|Im(\phi)| = 2$ kell legyen. Ez azt jelenti, hogy a függvény képtere a teljes $\mathbb{R}^2$, tehát az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletnek mindig lesz megoldása. Eredményeink alapján ez a leképezés tehát szürjektív, de nem injektív.

Izomorfizmus

6. Definíció

Legyen V és U vektorterek T felett, $\phi : V \to U$ lineáris leképezés közöttük. Ekkor ϕ-t izomorfizmusnak nevezzük, ha egyben bijektív is. (Vagyis, ha kölcsönösen egyértelmű és $\forall \mathbf{u} \in U$-ra létezik $\mathbf{v} \in V$, hogy $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$.) Ha két vektortér között létezik izomorf leképezés, akkor a két teret izomorfnak hívjuk, és

$$U \cong V - vel$$

jelöljük.

3. Tétel

Legyen V és U két végesdimenziós vektortér T felett. Ekkor

$$U \cong V \Leftrightarrow dim(U) = dim(V).$$

A tétel következménye, hogy minden n-dimenziós vektortér izomorf $\mathbb{R}^n$-nel.

Leképezés jellemzése

4. Tétel

Legyen V és U véges dimenziós vektorterek T felett. Alkossanak továbbá a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ vekotorok bázist V-ben, és legyen $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ tetszőleges eleme U-nak. Ekkor pontosan egy olyan ϕ lineáris leképezés létezik, amelyre teljesül, hogy

$$\phi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Legyen például $V = \mathbb{R}^2$ a szokásos bázissal, és $U = \mathbb{R}^3$. Kérdés, hogyan keressük meg azt a leképezést, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Nem nehéz belátni, hogy a

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

mátrix éppen ezt a leképezést definiálja.

Lineáris leképezések tere

Legyen V n-dimenziós, U m-dimenziós vektortér T felett, továbbá legyen $\phi\ V \to U$ és $\psi\ V \to U$ lineáris leképezések és $\lambda \in T$. Ekkor a szokásos függvényműveletekkel értelmezhetőek $\phi + \psi$, $\lambda\phi$, melyek eredménye újabb lineáris leképezés V és U között. Mivel ezek a műveletek ráadásul rendelkeznek a szokásos azonosságokkal, ezért ezek maguk is vektorteret alkotnak. Megmutatható, hogy az ilyen lineáris leképezések $n \cdot m$ dimenziós vektorteret alkotnak. Ezek a terek ugyanúgy izomorfak $\mathbb{R}^{n\times m}$-es mátrixokkal, mint ahogyan az n-dimenziós vektorterek izomorfak $\mathbb{R}^n$-nel. A függvények invertálhatósága ekkor éppen a mátrixok invertálhatóságát jelenti, az összetett függvények pedig éppen a mátrixok szorzatát.