GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041pályázati projekt keretében

Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén

az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,

az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,

és a Balassi Kiadó

közreműködésével.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió
támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

9. hét
RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLJA

Készítette: Lovics Gábor
Szakmai felelős: Lovics Gábor

Vázlat

1. Polinomok és egész számok

2. Parciális törtekre bontás

3. Integrálási szabályok

Az egész számok és a polinomok halmaza

Az egész számok és a polinomok halmaza között nagyon sok hasonlóság van, abban az értelemben, hogy ugyanolyan műveletekre nézve zártak. Két egész szám összege vagy különbsége egész szám, ahogyan a polinomok összege vagy különbsége is polinom. Ugyanígy két egész szám szorzata is egész szám, ahogyan két polinom szorzata is polinom, és ez a három művelet rendelkezik a szokásos műveleti tulajdonságokkal is. Két egész szám hányadosa azonban már nem feltétlenül lesz egész, ahogy két polinom hányadosa sem lesz minden esetben polinom. (Azokat a halmazokat, amelyeken ilyen típusú műveleteket tudunk végezni, az algebrában gyűrűknek nevezzük.) Ezt kihasználva, nagyon sok eredmény egy az egyben átvihető az egész számok halmazáról a polinomokra. A valós együtthatós polinomok halmazát ezután $\mathbb{R}[x]$-szel jelöljük, és legyen $p \in \mathbb{R}[x]$ $p \neq 0$ esetén $gr(p)$ a polinom foka.

A maradékos osztás

Tétel

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ekkor egyértelműen létezik $q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = qb + r$ és $|b| > |r|$.

Tétel

Legyen $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$, $p_2 \neq 0$. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $q, r \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, melyekre $p_1 = p_2 q + r$ és $gr(p_1) > gr(r)$ vagy $r = 0$.

A tétel alapján számos fogalom vihető át az egész számokról a polinomok halmazára, mint például oszthatóság, prím tulajdonság, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös stb.

A maradékos osztás egy speciális esete

Ha egy gyűrűn értelmeztük a maradékos osztást, akkor az oszthatóság fogalmát is értelmezni tudjuk, hiszen azt mondhatjuk, hogy az egyik polinom osztója egy másiknak, ha a maradékos osztás során a maradék 0. Ilyenkor lényegében szorzattá bontottuk az eredeti polinomunkat. Speciálisan ezért megvizsgálható, hogy egy első fokú polinom osztója-e egy magasabb fokú polinomnak. Ennek a kérdésnek a vizsgálata nem más mint, a polinom egy gyökének megkeresése.
Tegyük fel ugyanis, hogy egy $p(x)$ polinomnak osztója $x - a$ elsőfokú polinom, ahol a egy valós szám. Ekkor tudjuk, hogy $p(x) = (x - a)q(x)$, ahol $q(x)$ egy harmadik polinom. A jobboldalnak nyílván gyöke az a, de akkor a baloldalnak is gyöke kell legyen.

A maradékos osztás a gyakorlatban

Nem csak a tétel mondható ki nagyon hasonlóan a polinomok és az egész számok körében, de a maradékos osztás írásban nagyon hasonlóan végezhető el mindkét gyűrűben. Ezért most egy konkrét példán felelevenítjük, hogy hogyan is oszthatunk el maradékosan két számot egymással írásban. Osszuk el a 38 625-öt 8-cal.

$$38625 : 8 =$$

Balról jobbra haladunk. A 3-at 8-cal osztva 0-t kapunk, ezért az első szám, amit tényleg vizsgálunk a 38.

$$\begin{array}{l} 38625 : 8 = 4 \\ \ \ 6 \end{array} \qquad (38 - 4 \cdot 8 = 6)$$

A mardék mellé lemásoljuk a következő számjegyet, így azt vizsgáljuk, hogy a 26-ban hányszor van meg a 8.

$$\begin{array}{l} 38625 : 8 = 48 \\ \ \ 66 \\ \ \ \ \ 2 \end{array} \qquad (66 - 8 \cdot 8 = 2)$$

A maradékos osztás a gyakorlatban (folyt.)

Az eljárást tovább folytatva a következőket kapjuk:

$$\begin{array}{l} 38625 : 8 = 482 \\ \;66 \\ \;\;22 \\ \;\;\;6 \end{array} \qquad (22 - 2 \cdot 8 = 6)$$

$$\begin{array}{l} 38625 : 8 = 4828 \\ \;66 \\ \;\;22 \\ \;\;\;65 \\ \;\;\;\;1 \end{array} \qquad (65 - 8 \cdot 8 = 1)$$

Az eredmény alapján tehát

$$38625 = 8 \cdot 4828 + 1.$$

A maradékos osztás a gyakorlatban (folyt.)

Most pedig egy másik példán megnézzük, hogyan végezhetjük el nagyon hasonlóan ugyanezt a műveletet polinomok között. Nézzük a kövezkezőt:

$$(x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) =$$

Az osztásnál a legnagyobb kitevőjű tagokat vesszük figyelembe. Ebben az esetben az osztandó legnagyobb kitevős tagja x^5, az osztójé x^2. Ezért az eredménypolinom legynagyobb kitvőjű tagja x^3 lesz. Szorozzuk a kapott tagot az osztóval: $x^3(x^2 + x - 1) = x^5 + x^4 - x^3$. Az így kapott polinomot vonjuk ki az osztandóból, vagyis $x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x - 2 - (x^5 + x^4 - x^3) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2$. Az eljárást ezzel a polinommal kezdjük előről. Az egészet röviden a következőképpen jelölhetjük.

$$\begin{array}{llllll}
(x^5 & + 3x^4 & & - 2x^2 & + \; x & - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 \\
 & 2x^4 & - x^3 & - 2x^2 & + \; x & - 2
\end{array}$$

A maradékos osztás a gyakorlatban (folyt.)

Ezúttal a $2x^4$-et és az x^2-et kell figyelembe venni. Ez alapján az eredménypolinom következő tagja $2x^2$. Szorozzuk megint vissza az osztandó polinomot, és végezzük el a kivonást is. Így a következő alakhoz jutunk.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + 3x^4 \qquad - 2x^2 + \quad x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 \\
\qquad 2x^4 - x^3 - 2x^2 + \quad x - 2 \\
\qquad\quad -3x^3 \qquad\quad + \quad x - 2
\end{array}
$$

Az eljárást folytatva a következő alakokhoz jutunk.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + 3x^4 \qquad - 2x^2 + \quad x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 - 3x \\
\qquad 2x^4 - x^3 - 2x^2 + \quad x - 2 \\
\qquad\quad -3x^3 \qquad\quad + \quad x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad 3x^2 - 2x - 2
\end{array}
$$

A maradékos osztás a gyakorlatban (folyt.)

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & +\,3x^4 & & -\,2x^2 & +\ \ x & -\,2) & : (x^2+x-1) = x^3+2x^2-3x+3 \\
 & 2x^4 & -\,x^3 & -\,2x^2 & +\ \ x & -\,2 & \\
 & & -3x^3 & & +\ \ x & -\,2 & \\
 & & & 3x^2 & -\,2x & -\,2 & \\
 & & & & -\ \ x & +\,1 &
\end{array}
$$

Az eredményünk alapján tehát:

$$x^5+3x^4-3x^2+x-2=(x^2+x-1)(x^3+2x^2-3x+3)+(-x+1).$$

Racionális törtfüggvények

Legyen $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor a $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ alakú függvényeket racionális törtfüggvényeknek nevezzük. Célunk meghatározni a racionális törtfüggvények primitív függvényeit. Először is feltehető, hogy $gr(p_2(x)) > gr(p_1(x))$. Ugyanis, ha ez nem így lenne, akkor a polinomosztást felhasználva tudjuk, hogy
$p_1(x) = p_2(x)q(x) + r(x)$, ebből

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \int q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)} = \int q(x) + \int \frac{r(x)}{p_2(x)}.$$

Az utolsó formában a két integrálból az első egy egyszerű polinom integrálása, a második pedig olyan racionális törtfüggvény, ahol a számláló foka alacsonyabb, mint a nevezőjé.

A törtek átalakítása

Tétel

Legyen $p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $p_2(x)$ felbontható első- és másodfokú polinomok szorzatára.

Ezek alapján a következő alakba írható át az integrálandó:

$$\frac{p_1(x)}{(x-u_1)^{\alpha_1}\dots(x-u_n)^{\alpha_n}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\dots(a_kx^2+b_kx+c_k)^{\beta_k}}.$$

A törtek átalakítása (folyt.)

Tétel

Legyen egy racionális törtfüggvény a fenti formában adott. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $A_1, \dots, A_m$*,* $B_1, \dots, B_l$*,* $C_1, \dots, C_l \in \mathbb{R}$ *számok (*$m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n$*,* $l = \beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_k$*), melyre a fenti alakban adott racionális törtfüggvény a következő alakba írható:*

$$\frac{A_1}{(x-u_1)} + \frac{A_2}{(x-u_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-u_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_m}{(x-u_n)^{\alpha_n}} +$$
$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \frac{B_2 x + C_2}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots$$
$$+ \frac{B_{\beta_1} x + C_{\beta_1}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_l x + C_l}{(a_kx^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}}.$$

Parciális törtekre bontás a gyakorlatban

A következő példán bemutatjuk, hogy a gyakorlatban hogyan végezhető el a parciális törtekre bontás. Először azokat az A, B, C számokat keressük, melyekre teljesül, hogy

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Az összefüggés jobb oldalát közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Láthatjuk, hogy az ebben a formában felírt törtnek a nevezője azonos az eredetivel. Ezért a továbbiakban elegendő a számlálóval foglalkoznunk. A számlálóban felbontva a zárójeleket, majd a megfelelő tagokat kiemelve kapjuk, hogy

$$(A+B)x^2 + (4A+B+C)x + 4A - 2B - C.$$

Parciális törtekre bontás a gyakorlatban (folyt.)

Ezt az eredményt az eredeti tört számlálójával összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 4A + B + C &= 1 \\ 4A - 2B - C &= -1. \end{aligned}$$

Ha a második két egyenletet összeadjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 8A - B &= 0 \\ 8A &= B. \end{aligned}$$

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} A + 8A &= 1 \\ A &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás a gyakorlatban (folyt.)

Amiből visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$B = \frac{8}{9} \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{9(x-1)} + \frac{8}{9(x+2)} - \frac{-1}{3(x+2)^2}.$$

Parciális törtekre bontás a gyakorlatban (folyt.)

Most keressük azokat az A, B, C számokat, melyekre az teljesül, hogy

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Hasonlóan az előzöekhez először közös nevezőre hozzuk:

$$\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)},$$

majd a nevezőben felbontjuk a zárójeleket, és kiemeljük a megfelelő tagokat:

$$(A+B)x^2+(C-B)x+2A-C.$$

Az eredeti tört nevezőjével ezt összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ C-B &= 1 \\ 2A-C &= -1. \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás a gyakorlatban (folyt.)

Az első két egyenletet összedva kapjuk, hogy

$$A + C = 2.$$

Ehhez a harmadik egyenletet hozzáadva adódik, hogy

$$3A = 1$$
$$A = \frac{1}{3}.$$

Ezek után visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$B = \frac{2}{3} \quad C = -\frac{5}{3}.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x+5}{3(x^2+2)}.$$

Integrálás

A parciális törtekre bontás során tehát a következő alakú racionális törtfüggvényekhez juthatunk:

$$\frac{C}{x-a}$$
$$\frac{C}{(x-a)^k}$$
$$\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}$$
$$\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^k},$$

ahol C, D, a, b, c tetszőleges valós, k pedig egynél nagyobb egész szám.

Integrálás (folyt.)

Az ilyen alakú függvények integrálásához a követekezőkre van szükségünk:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{-k+1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+a)+B-\frac{Aa}{2}}{x^2+ax+b} =$$

$$= \int \frac{A}{2}\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \int \frac{C}{x^2+ax+b} =$$

$$= \int \frac{A}{2}\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \int \frac{C}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \ln(x^2+ax+b) + \frac{1}{D}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+a}{2D}\right) + c,$$

ahol $C = B - \frac{Aa}{2}$; $D = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$.

Integrálás (folyt.)

Az utolsó integráltípus meghatározásához egy kicsit általánosabb tételt kell alkalmaznunk.

Tétel

Legyen $r(x) = x^2 + ax + b$ *és* $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. *Ekkor*

$$\int \frac{g(x)}{r^m(x)} dx = \frac{A(x)}{r^{m-1}(x)} + \int \frac{B(x)}{r(x)},$$

ahol $A(x)$ *egy* $(2m-3)$*-ad fokú,* $B(x)$ *pedig elsőfokú polinom.*

Az $A(x)$ és $B(x)$ meghatározásához írjuk fel a polinomokat ismeretlen együtthatókkal, majd deriváljuk a tételben felírt egyenletet.

Feladat

Határozzuk meg a következő integrált

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2}!$$

Megoldás

A feladat megoldható lenne a parciális törtekre bontással is, azonban most alkalmazzuk a fenti tételt. Mivel ebben a példában $m = 2$, ezért $1 = 2m - 3 = m - 1$, vagyis az $A(x)$ első fokú polinom, és az integrálon kívüli tag nevezője is elsőfokon szerepel. Ez alapján a tétel a következő formában írható fel

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 2} dx.$$

Deriváljuk az összefüggés mindkét oldalát:

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{A(x^2 + 2) - (Ax + B)2x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}.$$

Feladat (folyt.)

A jobboldalt hozzuk közös nevezőre

$$\frac{A(x^2+2)-(Ax+B)2x+(Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)^2},$$

majd bontsuk fel a számlálóban szereplő zárójeleket és emeljük ki a megfelelő tagokat:

$$Cx^3+(D-A)x^2+(2C-2B)x+2A+2D.$$

Ezt az eredeti tört számlálójával összeveteve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ D-A &= 1 \\ 2C-2B &= 3 \\ 2A+2D &= -2. \end{aligned}$$

Az első egyenletet a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy

$$B=-\frac{1}{2}.$$

Feladat (folyt.)

A második és a negyedik egyenletekből pedig adódik, hogy

$$A = -1, \quad D = 0.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2+2)^2} = \frac{-x - \frac{1}{2}}{x^2+2} + \int \frac{x}{x^2+2} dx =$$

$$= \frac{-x - \frac{1}{2}}{x^2+2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + c.$$