GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

10. hét

Egyváltozós differenciálegyenletek

Lovics Gábor

Alapfogalmak

A feladat

Explicit formában adott elsőrendű differenciálegyenletnek hívunk egy olyan feladatot, ahol az ismeretlen egy függvény: $x(t)$, és ismeretes egy függvényszerű kapcsolat t, $x(t)$ és $\dot{x}(t)$ között. Az ilyen feladatok általánosan:

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (*)$$

alakban írhatók fel. Az egyenlet általános megoldásán ebben az esetben is egy olyan formulát értünk, amellyel az összes megoldás kifejezhető. Ha (*) mellett még azt is megköveteljük, hogy a függvény egy adott pontban egy adott értéket vegyen fel, vagyis ha adott egy

$$x(t_0) = x_0$$

alakú feltétel, akkor a feladatot már kezdetiérték-feladatnak nevezzük.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

A legegyszerűbb eset

Szétválasztható változójúnak hívunk egy differenciálegyenletet, ha felírható

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$

alakban. Ennek megoldása:

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt.$$

Feladat

Keressük meg azokat a függvényeket, melyekre teljesül a következő összefüggés!

$$\dot{x} = x^2 t$$

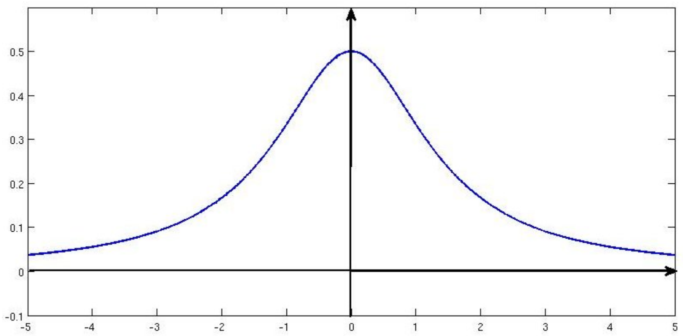
Ábrázoljunk néhányat a megoldások közül, és keressük meg azt, amelyre teljesül, hogy $x(0) = 1$!
Megoldás
A feladat nyílván szétválasztható ezért a megoldás felírható a következő alakban:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int t dt$$

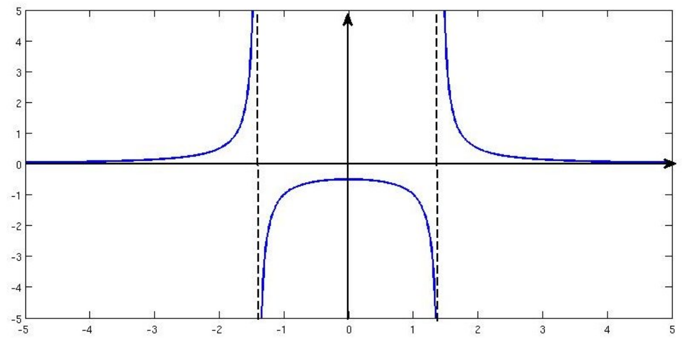
$$\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + c$$

$$x = \frac{2}{t^2 + c},$$

ahol c tetszőleges konstanst jelől, és különböző tetszőleges konstansok között nem tettünk különbséget a jelölésben. Ha $c > 0$, akkor a függvény a következőképpen ábrázolható:



Ha $c < 0$, akkor a függvény a következőképpen ábrázolható:



Ha megköveteljük azt is, hogy $x(0) = 1$ teljesüljön, akkor ezt a megoldásba helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{2}{0+c} = 1$$
$$c = 2.$$

Vagyis a függvény, ami kielégíti a kezdetiérték-feladatot az

$$x = \frac{2}{t^2+2}.$$

Lineáris differenciálegyenletek

Lineáris egyenletek

Egy konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet a következő alakú:

$$b = \dot{x} + ax.$$

Az ilyen alakú egyenletek könnyen megoldhatók a szétválasztható változók módszerével:

$$\dot{x} = -ax + b,$$

ha $x \neq \frac{b}{a}$, akkor

$$x = Ce^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Autonom egyenletek

Fogalmak

Autonóm differenciálegyenletnek hívjuk azt az esetet, amikor $\dot{x}$ nem függ közvetlenül t-től, csak x-től. Vagyis ekkor az egyenlet

$$\dot{x} = F(x)$$

alakban írható fel. Egy autonóm differenciálegyenlet esetén egyensúlyi állapotnak vagy fixpontnak nevezzük azokat az a számokat, melyekre, ha $x(0) = a$ (vagyis a folyamat a-ból indul), akkor $x(t) = a$ teljesül minden t-re (vagyis a folyamat a-ban is marad). Ezeket a számokat úgy kereshetjük meg, ha megoldjuk az $F(x) = 0$ egyenletet. Ekkor ugyanis, ha $a \in \mathbb{R}$ megoldása az egyenletnek, akkor $x(t) \equiv a$ konstans függvény megoldása az eredeti feladatnak, hiszen minden t-re

$$\dot{x} = F(x(t)) = F(a) = 0.$$

Az autonóm differenciálegyenlet egyensúlyi pontjait osztályozni tudjuk stabilitás szempontjából. Az a egyensúlyi állapotot stabilnak nevezzük, ha $x(0) \neq a$, de közel van a-hoz, akkor $x(t) \to a$. Instabilnak nevezzük, ha nem stabil. Az autonóm differeciálegyenletek stabilitásvizsgálatához nincs szükség arra, hogy megoldjuk az egyenletet. A megoldás helyett elég, ha megvizsgáljuk az úgynevezett fázisdiagramot, ami nem más, mint az $\dot{x} = F(x)$ függvény grafikonja. (A vízszintes tengelyen x, a függőlegesen $\dot{x}$ szerepel.) A grafikonról leolvashatóak egyrészt a differenciálegyenlet egyensúlyi pontjai, másrészt az is, hogy az egyensúlyi pont stabil-e vagy instabil. Ebben lényegében a függvényanalízisről tanúltak segítenek. Például, ha azt tapasztaljuk, hogy $x < a$ pontban $\dot{x} > 0$, ez azt jelenti, hogy ha a függvény a-nál kisebb értéket vesz fel, akkor a függvény monoton növekedő, és így közelebb kerül a-hoz. Hasonlóan, ugyanabban az x-ben azt tapasztaljuk, hogy $\dot{x} < 0$, akkor a függvény monoton csökkenő, ezért egyre távolabb kerül a-tól. Hasonlóan tárgyalható az $x > a$ eset is.

Példa egyváltozós fázisdiagramra

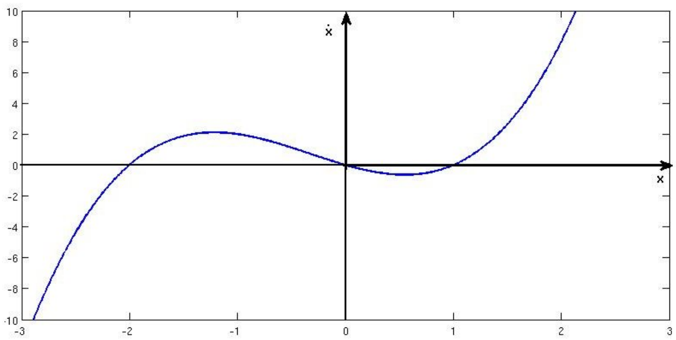
Ábrázoljuk az

$$\dot{x} = x(x-1)(x+2)$$

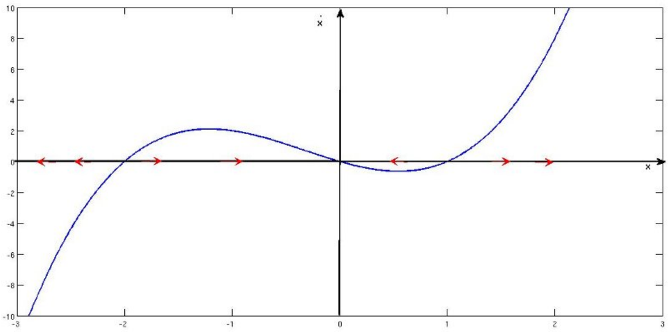
autonóm differenciálegyenlet fázisdiagramját, és vázoljuk ez alapján a feladatot megoldó függvények grafikonjait (vagyis az úgynevezett integrálgörbéket)!

Megoldás

A feladat felírásából egyértelmű, hogy az $\dot{x} = 0$ akkor, ha $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$. Vagyis ezek a pontok lesznek a feladat stacionárius pontjai. Ábrázoljuk a fázisdiagramot.



Mivel, ha $x < 2$, akkor az ábra alpaján $\dot{x} < 0$, ezért ebben az esetben az x csökken. Hasonlóan lolvasható, hogy ha $-2 < x < 0$, akkor az x növekszik, ha $0 < x < 1$ csökken. Végül, ha $1 < x$, akkor megint növekszik. Ezeket a változásokat a vízszintes tengelyen piros nyilacskákkal jelöljük.



Az ábráról leolvasható tehát, hogy a rendszer egyetlen stabil egyensúlyi pontja a 0, az 1 és a -2 instabil egyensúlyi pontok. Ez azt jelenti, hogy az idő előrehaladtával az 1 és -2 pontoktól egyre távolabb, míg az 0 ponthoz egyre közelebb kerülünk, ha valahonnan a közeléből indulunk. Így már fel tudjuk rajzolni az integrál görbéket.