GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

13. hét

Nem lineáris programozás

Lovics Gábor

Alapfogalmak, egyenlőségi kritériumok

Feltételes szélsőérték-számítás

A feltételes szélsőérték-számítási feladat (minimalizálás) a következő formában írható fel általánosan:

$$\left.\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in S \end{aligned}\right\} P,$$

ahol $f(x)$ tetszőleges $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény és $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Az általános esetet azonban nem tudjuk megoldani még a legnagyobb sebességű számítógépekkel sem. A legjobban kezelhető speciális eset a lináris, amelyet az előző órán áttekintettünk. A lineáris programozásnak nagyon sok gyakorlati alkalmazása van, gyakori azonban az is, hogy egy modell a lineáris esetben matematikailag jól kezelhető, a gyakorlatban azonban a nem lineáris eset az igazán érdekes. Gyakran a lineáris esetet arra alkalmazzuk, hogy közelítő megoldást keressünk egy nem lineáris példára.

Egyenlőségi kritériumok

Legyenek $f(\mathbf{x})$, $g^{(1)}(\mathbf{x})$, $g^{(2)}(\mathbf{x}), \ldots, g^{(k)}(\mathbf{x})$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvények, Egy egyenlőségi kritériumokkal felírt feltételes optimalizálási probléma általános alakja:

$$\left.\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) \\ g^{(1)}(\mathbf{x}) = 0 \\ g^{(2)}(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ g^{(k)}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

A feladathoz tartozó Lagrange-függvény pedig:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g^{(i)}(\mathbf{x}).$$

Az elsőrendű kritériumok ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
f_1'(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1'^{(1)}(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_1'^{(2)}(\mathbf{x}) - \cdots - \lambda_k g_1'^{(k)}(\mathbf{x}) &= 0\\
f_2'(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_2'^{(1)}(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_2'^{(2)}(\mathbf{x}) - \cdots - \lambda_k g_2'^{(k)}(\mathbf{x}) &= 0\\
&\vdots\\
f_n'(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_n'^{(1)}(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_n'^{(2)}(\mathbf{x}) - \cdots - \lambda_k g_n'^{(k)}(\mathbf{x}) &= 0\\
g^{(1)}(\mathbf{x}) &= 0\\
g^{(2)}(\mathbf{x}) &= 0\\
&\vdots\\
g^{(k)}(\mathbf{x}) &= 0.
\end{aligned}$$

Ennél a feladattípusnál a Lagrange-szorzók hasonló szerepet játszanak, mint a lineáris esetben a duál változók. Ekkor ugyanis ezek a változók fogják az árnyékárakat megmutatni.

Példa

Oldjuk meg a következő feltételes optimalizálási feladatot:

$$\left.\begin{aligned}\min x^2 + y^2\\ 2x + y = 10\end{aligned}\right\}.$$

Megoldás

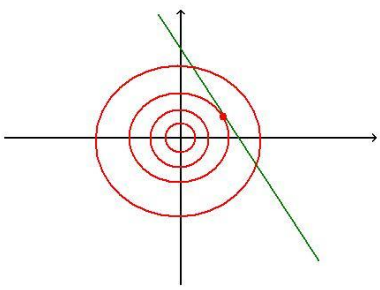
A feladathoz tartozó Lagrange-függvény:

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(2x + y - 10).$$

Az optimális megoldás feltétele:

$$\begin{aligned}
L_x'(x,y) = 2x + 2\lambda &= 0\\
L_y'(x,y) = 2y + \lambda &= 0\\
2x + y &= 10.
\end{aligned}$$

Az első egyenletet átrendezve kapjuk, hogy $\lambda = -x$. Ezt a másodikba visszaírva arra jutunk, hogy $x = 2y$. Ezt a harmadikba helyetesítve kapjuk, hogy $y = 2x$. Visszahelyetesítve ezt a korábbi egyenletekbe láthatjuk, hogy $x = 4$, $\lambda = -4$.



Az ábráról leolvasható, hogy valóban a minimalizálási feladatot oldottuk meg.

Konvex programozás

A feladat

A feltételes optimalizálás legáltalánosabb, de még jól kezelhető esete az úgynevezett konvex optimailzálás. Legyen

$$\left.\begin{array}{c}\min f(\mathbf{x})\\ \mathbf{x}\in S\end{array}\right\} CP,$$

ahol $f(x)$ $S \to \mathbb{R}$ konvex függvény és az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. A konvex programozási feladatnak számíthatósági szempontból két nagy előnye van. Az egyik, hogy mivel a megengedett megoldások halmaza konvex, ezért két megengedett megoldás közötti pontok (a két pontot összekötő szakasz minden pontja) is részei a megengedett megoldások halmazának. A másik, ha ezt a tényt kiegészítjük azzal, hogy a célfüggvény is konvex, akkor biztosak lehetünk benne, hogy minden lokális optimum egyben globális optimum is.

1. Tétel
Legyen $g(\mathbf{x})$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény, és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az $S = \{\mathbf{x}|g(\mathbf{x}) \le c\}$ halmaz konvex.

A tétel számunkra legfontosabb következménye, hogy a gyakorlatban a megengedett megoldások halmazát a konvex programozás esetén is egyenlőtlenségi kritériumokkal adjuk meg. Legyenek $f(\mathbf{x})$, $g^{(1)}(\mathbf{x})$, $g^{(2)}(\mathbf{x}), \ldots,$ $g^{(k)}(\mathbf{x})$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható konvex függvények. Egy egyenlőtlenségi kritériumokkal felírt feltételes optimalizálási probléma általános alakja:

$$\left.\begin{array}{c}\min f(\mathbf{x})\\ g^{(1)}(\mathbf{x}) \le 0\\ g^{(2)}(\mathbf{x}) \le 0\\ \vdots\\ g^{(k)}(\mathbf{x}) \le 0\end{array}\right\} CP.$$

A konvex programozási feladat megoldása

A fenti feladat megoldása nagyon hasonlóan megy, mint az egyenlőséges esetben. Először is most is felírjuk a feladathoz tartozó Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g^{(i)}(\mathbf{x}).$$

Ebben az esetben azonban a feladat megoldása már nem vezethető vissza egy „egyszerű” többismeretlenes egyenletrendszer megoldására. Tudjuk azonban, hogy a lineáris esetben a duálváltozókra az optimális megoldásban igaz volt a komplementaritás, vagyis hogy egy korláthoz tartozó duálváltozó akkor nem nulla, ha az egyenlőtlenségi kritérium egyenlőséggel teljesül. Mivel ebben az esetben a Lagrange-szorzók játszák az árnyékárak szerepét, ezért velük írható fel a komplementaritási kritérium. Logikus ugyanis, hogy az árnyékárak ebben az esetben is nullák lesznek, ha egy korlát nem teljesül élesen, hiszen ekkor a korlát kis mértékű változtatása nem befolyásolja a célfüggvény értékét. A konvexitási feltételek pedig ahhoz segítenek hozzá, hogy ne kelljen a másodrendű feltételekkel törödnünk, elegendő legyen egy elsőrendű feltételeknek eleget tévő pont megkeresése. Sajnos azonban ezeknél a feladatoknál a konvexitás önmagában nem is elegendő annak biztosítására, hogy az optimum megkereséséhez szükséges és elégséges feltételeket adjunk. Ehhez további úgynevezett regularitási feltételek is kellenek. A regularitási feltételek sokféle módon megfogalmazhatóak, itt nem tárgyaljuk őket részletesen. A regularitási feltételek teljesülésének ellenőrzése a gyakorlatban sokszor ugyanolyan nehéz vagy nehezebb, mint az eredeti feladat megoldása, ezért ezeknek a teljesülésében inkább csak „reménykedni” szoktak a megoldások során.

Komplementaritás konvex esetben

2. Tétel (Kuhn-Tucker féle elégséges feltételek)
Legyen adva egy konvex programozási feladat (CP) a fenti egyenlőtlenséges kritériumokkal megadott formában, és legyenek a függvények folytonosan differenciálhatóak. Ekkor annak elégséges feltétele, hogy $\mathbf{x}^*$ pont optimális megoldása a feladatnak, hogy léteznek olyan $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_m \ge 0$ számok, melyekre

- *(megengedettségi kritérium)* $\mathbf{x}^*$ *legyen megengedett megoldása a feladatnak;*
- *(stacionaritási kritérium)* $\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g^{(j)}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$*;*
- *(komplementaritási kritérium), ha* $\lambda_j = 0$*, akkor* $g^{(j)}(\mathbf{x}^*) < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$*.*

A tétel tehát a szükséges feltételeit adja meg az optimumnak. Ha az úgynevezett regularitási feltételek teljesülnek, akkor ezek a feltételek elégségesek is. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy ha egy algoritmusunk talált a fenti tételnek megfelelő megoldást, akkor az biztosan optimális megoldása az eredeti feladatnak. Ha viszont nem talált, akkor két eset lehetséges. Az egyik, hogy a feladatnak nincs optimális megoldása, a másik, hogy van, csak nem teljesülnek a regularitási feltételek. Mivel a regularitási feltételeket nem tudjuk tipikusan ellenőrizni, ezért ezt a problémát általánosan nem tudjuk megoldani.

Példa komplementaritás használatára

Nézzük meg a következő konvex programozási feladatot:

$$\left.\begin{array}{c} \max xy \\ x^2 + y^2 \leq 25 \\ x + 7y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} CP.$$

A feladathoz tartozó Lagrange-függvény a következő:

$$L(x, y) = xy - \lambda_1(x^2 + y^2 - 25) - \lambda_2(x + 7y - 25) - \lambda_3 x - \lambda_4 y.$$

Mielőtt felírnánk az optimum elégséges feltételeit, egyszerűsítsük le a feladatot kicsit, néhány specialitást kihasználva. Jól látszik, hogy a feladatnak vannak olyan megengedett megoldásai, melyekre mindkét változó szigorúan pozitív (pl.: $x = y = 1$). Ez azt jelenti, hogy az optimális megoldásban a célfüggvény értéke biztosan pozitív lesz. Ebből viszont az következik, hogy az $x = 0$ vagy az $y = 0$ nem lehet optimális megoldása a feladatnak. Eszerint az utolsó két feltétel biztos, hogy szigorú egyenlőtlenséggel teljesül az optimumban, tehát $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Vagyis elegendő a következő Lagrange-függvényt vizsgálnunk:

$$L(x, y) = xy - \lambda_1(x^2 + y^2 - 25) - \lambda_2(x + 7y - 25).$$

(Ha ezt az egyszerűsítést nem tesszük meg, akkor is eljutunk az optimális megoldáshoz, csak sokkal több számolással.) Az egyszerűsítés után az optimum elégséges feltétele, hogy találjunk olyan $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ számokat, melyre

$$\begin{aligned} L'_x(x, y) &= y - 2\lambda_1 x - 7\lambda_2 = 0 \\ L'_y(x, y) &= x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ & \qquad\qquad x^2 + y^2 \leq 25 \;\; /\lambda_1 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25/ \\ & \qquad\qquad 7x + y \leq 25 \;\; /\lambda_2 > 0 \Rightarrow 7x + y = 25/. \end{aligned}$$

Ennek a rendszernek a megoldását úgy kereshetjük meg, hogy az első két egyenletet négyféle egyenletrendszerrel és egyenlőtlenségekkel egészítjük ki. Mind a négy esetben az egyenlőséges feltételekből indulunk ki, azoknak megkeressük a megoldását, majd ellenőrizzük, hogy a kapott megoldásra teljesülnek-e az egyenlőtlenségi feltételek. A négy eset a következő

1. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $x^2 + y^2 < 25$, $7x + y < 25$;
2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $x^2 + y^2 < 25$, $7x + y = 25$;
3. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$, $7x + y < 25$;

4. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $x^2 + y^2 = 25$, $7x + y = 25$.

1. A $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$-t az első két egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $x = y = 0$, ami a korábban belátottak alapján nem lehet optimális megoldás.

2. Az $\lambda_1 = 0$-t az első két egyenletbe visszahelyettesítve a következő egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{aligned} y - 7\lambda_2 &= 0 \\ x - \lambda_2 &= 0 \\ 7x + y &= 25. \end{aligned}$$

A második egyenlet alapján $x = \lambda_2$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy $y = 7x$. Ezt a harmadikba beírva láthatjuk, hogy $x = \frac{25}{14} \approx 1,79$. Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $y = \frac{25}{2} = 12,5$, $\lambda_2 = \frac{25}{14}$. Ellenőriznünk kell még az egyenlőtelnségeket. A $\lambda_2 = \frac{25}{14} > 0$ feltétel teljesűl, viszont az $x^2 + y^2 \approx 160 > 25$ megsérti a megengedettségi feltételt, így az első esetből nem jött ki a feltételeknek megfelelő megoldás.

3. A $\lambda_2 = 0$-t behelyettesítve az első két egyenletbe, és azokat kiegészítve a megfelelő harmadik egyenlettel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y - 2\lambda_1 x &= 0 \\ x - 2\lambda_1 y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 25. \end{aligned}$$

Az első két egyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= \frac{y}{x} \\ 2\lambda_1 &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

A két egyenlet jobboldala egyenlővé tehető egymással, vagyis $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$. Ennek az egyenletnek kétféle megoldása van, az egyik az $x = y$, a másik az $x = -y$. Ha viszont kihasználjuk azt is, hogy $\lambda_1 > 0$ kell legyen, akkor láthatjuk, hogy a második eset nem lehet megoldása az egyenletnek, így elegendő az elsővel továbbmennünk. Helyettesítsük az $x = y$-t a harmadik egyenletbe:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 25 \\ x &= \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Visszahelyttesítéssel kapjuk, hogy $y = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Láthatjuk, hogy a $\lambda_1 > 0$ feltételünk teljesül. Ellenőrizni kell még, hogy

$$\frac{7 \cdot 5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 28 > 25.$$

A megengedettségi feltétel megint nem teljesül, így a feladatnak ebből az esetéből sem jön ki optimális megoldás.

4. Végül az utolsó esetben négy ismeretlenünk és négy egyenletünk lesz:

$$\begin{aligned} y - 2\lambda_1 x - 7\lambda_2 &= 0 \\ x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \\ 7x + y &= 25. \end{aligned}$$

A negyedikből adódik, hogy $y = 25 - 7x$. Ezt a harmadik egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^2 + (25-7x)^2 &= 25 \\ 50x^2 - 350x + 600 &= 0 \\ x^2 - 7x + 12 &= 0 \\ x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} &= \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Az eredményt a harmadik egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy ha $x = 4$, akkor $y = 25 - 7 \cdot 4 = -3$, ami nem megendett megoldás. Hasonlóan, ha $x = 3$, akkor $y = 25 - 7 \cdot 3 = 4$. A kapott eredményt helyettesítsük vissza az első két egyenletbe. Így a következő rendszert kapjuk

$$\begin{aligned} 4 - 6\lambda_1 - 7\lambda_2 &= 0 \\ 3 - 8\lambda_1 - \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet hétszeresét vonjuk ki az első egyenletből, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -50\lambda_1 &= -17 \\ \lambda_1 &= \frac{17}{50} = 0,34. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lambda_2 = 0,28.$$

Mivel $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 > 0$, ezért ez a eset kielégíti a Kun-Tucker-tétel feltételeit, tehát optimális megoldást találtunk.

A Kun-Tucker-tétel speciális esetei

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a Kun-Tucker-tétel valójában nem más, mint több korábban tanult feltételes optimalizáláshoz kapcsolodó eredmény általánosítása.

1. Legyen adva egy konvex optimalizálási feladat, és tegyük fel, hogy az optimimum a megengedett megoldások egyik belső pontja. Ekkor a komplemetaritási kritérium értelmében $\lambda_j = 0$ minden j-re. Ekkor viszont a stacionaritási kritérium alapján ez azt jelenti, hogy ez a pont a célfüggvényem egy stacionárius pontja.

2. Az egyenlőségi kritériumoknál tanultak is tekinthetők a Kun-Tucker-tétel egy speciális esetének. Ennek szemléltetésére nézzünk egy olyan példát, ahol egy darab egyenlőségi korlát mellett szeretnénk maximalizálni egy célfüggvényt. Ekkor a feladat a következő alakú lesz

$$\left.\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}\right\} CP.$$

A szokásos trükkel ez átírható egyenlőtlenséges formába

$$\left.\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ -g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned}\right\} CP'.$$

A Kun-Tucker-tétel értelmében az optimalitás kritériuma, hogy létezzenek olyan $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ számok melyre

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}) &\le 0\\
-g(\mathbf{x}) &\le 0\\
\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} &=\\
= \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),\\
\text{ha } \lambda_1 = 0 \Rightarrow g(\mathbf{x}) &< 0,\\
\text{ha } \lambda_2 = 0 \Rightarrow g(\mathbf{x}) &> 0.
\end{aligned}$$

Az első két egyenlőtlenségből következik, hogy $g(\mathbf{x}) = 0$. Ebből az is következik, hogy $\lambda_1 \neq$, $\lambda_2 \neq 0$. A stacionaritási kritérium esetén a $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ változó lesz az előjelkötetlen Lagrange-szorzó. (Igazából a levezetés csak akkor helyes, ha $g(x)$ lineáris függvény, mert ekkor lesz $g(x)$ és $-g(x)$ is konvex.)

3. Mivel a lineáris függvények egyszerre konvexek és konkávok is, ezért egy lineáris programozási feladatra is felírható a Kun-Tucker-tétel. Ekkor a komplementaritási kritérium éppen a lineáris programozás komplementaritását fogja visszaadni.