Geodézia 8.

Sokszögelés

Tarsoly, Péter, Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar
Tóth, Zoltán, Nyugat-Magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Geodézia 8.: Sokszögelés

írta Tarsoly, Péter és Tóth, Zoltán
Lektor: Homolya, András

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Kivonat

Ez a modul a sokszögeléssel történő geodéziai alappontsűrítés elméleti hátterét és gyakorlati szabályait foglalja össze.

Tartalom

A táblázatok listája

8. fejezet - Sokszögelés

1. 8.1 Bevezetés

Jelen modul a Geodézia tárgy egyik modulja. Az itt következő ismeretek megértéséhez javasoljuk, hogy olvassa el a Geodézia tárgy pontkapcsolások moduljánál írottakat.

Ebből a fejezetből megismerheti:

- a sokszögelés elméleti alapjait,
- a sokszögvonalak típusait,
- a sokszögelésnek, az egyik legelterjedtebb hagyományos alappontsűrítési módszernek, gyakorlati végrehajtási szabályait.

A fejezet elsajátítása után képes lesz:

- különböző sokszögvonalak megmérése és a sokszögpontok koordinátáinak kiszámítására,
- a mérés során elkövetett durva hiba helyének meghatározására.

2. 8.2 A sokszögvonalak típusai, alapfogalmak

A Geodézia tárgy pontkapcsolások modulja keretében megismerhettük az első geodéziai főfeladatot – poláris pont számítás – mellyel pl. a vetületi síkon egy új pont koordinátáit tudjuk meghatározni, amennyiben ismert egy adott pontról az új pontra menő irány tájékozott irányértéke, és az adott pont, valamint az új pont távolsága. Az így meghatározott új alapponton végezett iránymérésünket mindenképpen tájékozni tudjuk. Mégpedig annak az alappontnak a felhasználásával, melyről az előző lépésben az új pontot meghatároztuk. (Hiszen ezek biztosan összelátszódnak.) Így erről az új pontról is - az első geodéziai főfeladat segítségével – meg tudunk határozni egy újabb alappontot. Ennek az ”eljárásnak” a következetes ismétlésével tetszőleges számú új pont számítható, ha meghatározzuk a szomszédos pontok távolságát, valamint az egyes pontokból kiinduló egyenesek (valóságban szakaszok) egymással bezárt vízszintes szögét. A pontmeghatározásnak ezt a módját nevezik **sokszögelésnek**. A gyakorlatban a vonalas jellegű létesítmények (út, vasút, töltés, vágat stb.) felmérési, kitűzési munkái során találkozhatunk az eljárással. (A továbbiakban feltételezzük, hogy a terepi mérési eredményeinket már átszámítottuk arra a vetületi síkra, ahol a számításainkat végezzük.)

Az így kialakított, a pontokat összekötő törtvonalat **sokszögvonalnak**, az egyes oldalakat **sokszögoldalnak**, az oldalak egymással bezárt szögét pedig **törésszögnek** nevezzük. (8-1 ábra) A mért oldalakat általában t betűvel jelöljük, alsó indexbe annak a két sokszögpontnak a számát írva, amelyek közé a mért távolság vonatkozik; a törésszögeket pedig β-val szokták jelölni. Mivel minden szomszédos oldal két szöget zár be egymással (melyek egymást 360°-ra egészítik ki), ezért megegyezés alapján törésszögnek minden esetben a – későbbiekben tárgyalt – számítási irány **bal oldalára eső szöget** szoktuk tekinteni. Szabatosabb megfogalmazásban a törésszög az a szög, amelyet a számítás kezdő és végpontjának megválasztásával kijelölt haladási értelemben a megelőző sokszögoldal leír, ha geodéziai pozitív értelmű forgatással a követő oldalba forgatjuk.

A sokszögvonal alakja szerint lehet **nyílt**, amikor a kezdő és a végpontja két különböző pont, és lehet **zárt**, amikor a kezdő és a végpont ugyanaz a pont. A geodéziában elsősorban a nyílt sokszögvonalak használatosak; zárt sokszögvonalak általában speciális feladatoknál, megkerülhetetlen kényszerűségi okokból fordulnak elő (pl. mérnökgeodéziai felmérések). Zárt sokszögvonalak használata kerülendő, mert:

- a felhasznált alappont **kerethibája**, az esetleges **téves pontazonosítás** bizonyos mérési (számítási) körülmények között (pl. egy darab tájékozó irány mérése távmérés nélkül) nem kimutatható,
- a távmérés (hosszmérés) **méretarányhibája** szintén nem kimutatható. Ennek forrása többek között lehet a szorzóállandó durva hibája, szélsőséges esetben a mértékegység helytelen megválasztása.

A sokszögvonal **csatlakozó**, ha ismert koordinátájú alappontokhoz csatlakozik, és **önálló**, ha alappontokhoz nem csatlakozik. Ha a sokszögvonalnak csak a kezdőpontja ismert koordinátájú alappont, akkor a sokszögvonal

egyszeresen csatlakozó; ha mind a két végpontja ismert, akkor **kétszeresen csatlakozó**. Ha nemcsak a sokszögvonal pontjain mérjük a törésszögeket, hanem a kezdő vagy/és a végponton is felállunk, és onnan a sokszögoldalakon kívül más ismert alappontokra is mérünk, akkor a sokszögvonalat **tájékozottnak** nevezzük. **Egyszeresen tájékozott**, ha csak a kezdőpontján végzünk tájékozást, és **kétszeresen tájékozott**, ha a kezdő-és a végponton is tájékozunk. Végül a sokszögvonalat **nyújtott**nak nevezzük, ha a mért törésszögek közel 180°-osak.

Az eddigieket összefoglalva a geodéziai gyakorlatban alappont-sűrítésre a **nyílt** (kezdő és végpont két különböző ismert alappont) **nyújtott** (a mért törésszögek közel 180°-osak) sokszögvonalak használatosak, célszerűen a lehető legtöbb fölös mérés figyelembe vétele mellett.

A nyújtott sokszögvonalak alkalmazásának szükségességére még nem adtunk magyarázatot. Ennek részben „szakmatörténeti” okai vannak. A távolságmérés a fizikai távmérők elterjedéséig (’70-es, ’80-as évek) a terepi geodézia gyenge pontja, „Achilles-sarka” volt, pontosságát tekintve sokáig elmaradt a szögmérésétől. Teljesen nyújtott sokszögvonalnál elérhető, hogy a sokszögoldalak pontatlanabb távolság-meghatározása feleslegesen ne terhelje a megbízható törésszög-meghatározást. Másrészt célszerűségi okokból – számítási kapacitáshiány miatt – a sokszögvonalak számításánál kiegyenlítés helyett sokáig egyfajta közelítő hibaelosztást végeztünk (mint látni fogjuk ez a mai napig fennmaradt). Ennek során a távolságmérésben elkövetett hibát a távolságmérés eredményei között, míg a szögmérésben elkövetni vélt hibát a szögmérés eredményei között osztjuk el. Ezt akkor tehetjük meg, ha a kétféle (távmérési, illetve szögmérési) hiba hatása különválasztható: erre szintén a nyújtott sokszögvonalak alkalmasak.

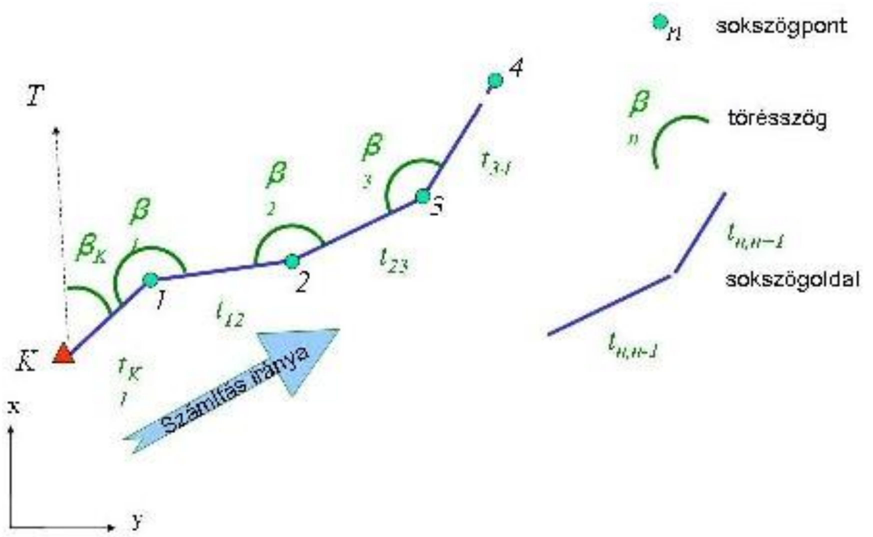
A mai „korszerű” műszereknél a távolságmérés megbízhatósága nem marad el a szögmérésétől. Kevésbé kell figyelnünk tehát a nyújtott sokszögvonalak vezetésére. Azonban egy könnyen belátható geometriai kényszer továbbra is indokolttá teheti ezek alkalmazását: nyújtott sokszögvonal alkalmazásakor az új pontokat az alappontok kerethibái maximum a kerethiba mértékig terhelik.

3. 8.3 Sokszögvonalak számítása

A sokszögvonal egyes pontjainak számításánál az ismert alappontok koordinátáinak és a mért szögeknek segítségével számítjuk az egyes sokszögoldalak **tájékozott irányértékeit**, majd a sokszögoldalak hosszának ismeretében a haladási iránynak megfelelően a sokszögpontok koordinátáit. Abban az esetben, ha a sokszögvonal mérése során **fölös méréseket** is végzünk, a mérési hibák és a meglévő alappontok kerethibái miatt a mérési eredményeink között ellentmondások fognak fellépni. Lehetőségünk lenne ezeknek az ellentmondásoknak a feloldására kiegyenlítő számítások alkalmazásával, azonban az előző pontban ismertetett okokból **közelítő hibaelosztási eljárásokat** alkalmazunk. Ezek a közelítő eljárások a gyakorlati elvárásoknak megfelelő megbízhatóságú adatokat fognak szolgáltatni.

3.1. 8.3.1 Egyszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonal

Ebben az esetben az 1, 2, ...n sokszögpontok koordinátáinak meghatározásához mértük a közöttük lévő távolságokat, a törésszögeket; valamint a kezdőponton a szomszédos sokszögpont mellett legalább egy (az ábrán pontosan egy) tájékozó pontra is végeztünk iránymérést (8-2. ábra).



Ha a rendelkezésünkre álló adatok alapján ki tudjuk számítani az egyes sokszögoldalak tájékozott irányértékét, akkor ezeknek és a mért oldalhosszaknak ismeretében az első geodéziai főfeladat következetes ismétlésével számíthatjuk az egyes sokszögpontok koordinátáit. Mivel az (8-2. ábra) szerint kezdőponton mértünk egy tájékozó irányt, ezért az álláspont és a tájékozó pont koordinátáiból tudjuk számolni a δ_{KT} irányszöget. Ezután

$$\delta'_{K1} = \delta_{KT} + \beta_K$$

8-1. egyenlet

képlettel tudjuk számítani az első sokszögoldal tájékozott irányértékét. Ha ezt az irányértéket 180°-al megfordítjuk (ellentett irányt számolunk), akkor számolni tudjuk az 1-es sokszögpontról a kezdőpontra menő tájékozott irányértéket. Ha ehhez hozzáadjuk az első ponton mért törésszöget, akkor megkapjuk az 1-es sokszögpontról a 2-es sokszögpontra menő tájékozott irányértéket. Tehát:

$$\delta'_{12} = \delta'_{1K} + \beta_1 = \delta'_{K1} \pm 180^\circ + \beta_1$$

8-2. egyenlet

Az egyszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonal számításának lépéseit a következőkben foglaljuk össze:

1. A tájékozó irány irányszögének számítása a kezdőpont és a tájékozó pont koordinátáiból.

2. A sokszögoldalak tájékozott irányértékének számítása a 8.2-es képlet mintája alapján.

$$\delta'_{K1} = \delta_{KT} + \beta_K$$
$$\delta'_{12} = \delta'_{K1} \pm 180 + \beta_1$$
$$.$$
$$\delta'_{n-1,n} = \delta'_{n-2,n-1} \pm 180 + \beta_{n-1}$$

8-3. egyenlet

1. A sokszögoldalak koordinátatengelyekre eső vetületeink számítása.

$$\Delta y_{ij} = t_{ij} \cdot \sin \delta'_{ij}$$
$$\Delta x_{ij} = t_{ij} \cdot \cos \delta'_{ij}$$

8-4. egyenlet

1. A koordináták számítása.

$$y_1 = y_K + t_{K1} \cdot \sin \delta'_{K1} = y_K + \Delta y_{K1}$$
$$y_2 = y_1 + t_{12} \cdot \sin \delta'_{12} = y_1 + \Delta y_{12}$$
.
$$y_n = y_{n-1} + t_{n-1,n} \cdot \sin \delta'_{n-1,n} = y_{n-1} + \Delta y_{n-1,n}$$
és
$$x_1 = x_K + t_{K1} \cdot \cos \delta'_{K1} = x_K + \Delta x_{K1}$$
$$x_2 = x_1 + t_{12} \cdot \cos \delta'_{12} = x_1 + \Delta x_{12}$$
.
$$x_n = x_{n-1} + t_{n-1,n} \cdot \cos \delta'_{n-1,n} = x_{n-1} + \Delta x_{n-1,n}$$

8-5. egyenlet

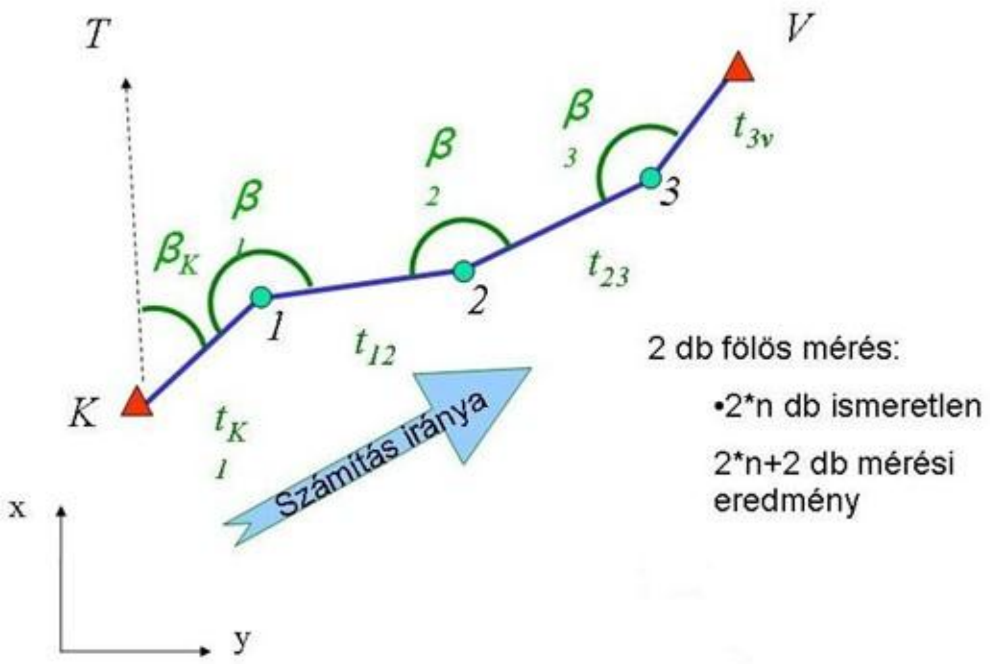
Abban az esetben, ha a kezdőponton nem egy, hanem több tájékozó irányt mérünk (ez a gyakorlatban mindenképpen kívánatos), az egyes tájékozó irányokhoz tartozó tájékozási szögekből kiszámíthatjuk a súlyozott középtájékozási szöget, és ezután a már megismert módon tudjuk képezni az első sokszögoldal tájékozott irányértékét. Ebben az esetben a levezetett tájékozott irányértéket fogjuk az első oldal törésszögének tekinteni ($\beta_K=\delta'_{K1}$). Ennél a sokszögvonal típusnál láthatóan **nincs fölös mérés**, a mérésre, és a számításunkra tehát nincs ellenőrzésünk. Az ilyen sokszögvonalat **szabad sokszögvonalnak** nevezzük. A számítás egy részére ellenőrzés lehet, ha ellenőrzésül kiszámítjuk a kezdő- és végpont koordináta különbségét, ennek meg kell egyeznie a megfelelő oldalvetületek összegével.

A nyílt, önálló sokszögvonalak számítása nagyon hasonló a szabad sokszögvonalhoz. Az önálló sokszögvonalnál természetesen nem mértünk a kezdőponton tájékozó irányt, és nem ismerjük a kezdőpont koordinátáit sem. Ebben az esetben a kezdőpont koordinátáit és a kezdő oldal tájékozott irányértékét az adott feladat kívánalmainak megfelelően kell megválasztani.

3.2. 8.3.2 Kétszeresen csatlakozó, egyszeresen tájékozott sokszögvonal számítása

A kétszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonal abban különbözik az egyszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonaltól, hogy a végpontja is ismert koordinátájú pont. (8-3 ábra)

Ebben az esetben ismertek a kezdő- és végpont, továbbá a tájékozó pont koordinátái. Mérési eredményeink a megfelelő távolságok és törésszögek. Ha a sokszögvonal n darab sokszögpontból áll, akkor ebben az esetben összesen 2n+2 darab távolság és törésszög mérhető. (Emlékeztetőül: az egyszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonalnál ennél kettővel kevesebb, csupán 2n mérési eredményünk) Miután n darab sokszögpont koordinátáinak meghatározásához elegendő 2n darab távolság és törésszög, ezért van két fölös mérésünk. A fölös mérések lehetőséget adnak a méréseink és a felhasznált alappontok ellenőrzésére. A sokszögoldalak koordinátatengelyekre eső vetületeinek összegének – abban az esetben, ha kerethibák és mérési hibák nem lennének – meg kellene egyeznie a kezdő-és végpont megfelelő koordináta különbségeivel (ezt koordináta-feltételnek is hívjuk).



8-3. ábra Kétszeresen csatlakozó, egyszeresen tájékozott sokszögvonal

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta y = \sum_{i=1}^{n} t \cdot \sin\delta' = y_v - y_k$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x = \sum_{i=1}^{n} t \cdot \cos\delta' = x_v - x_k$$

8-6. egyenlet

A mérési és a kerethibák miatt ezek a feltételek nem lesznek kielégítve, hanem:

$$(y_V - y_K) - \sum_{i=1}^{n} t \cdot \sin\delta' = (y_v - y_k) - \sum_{i=1}^{n} \Delta y = dy$$

$$(x_V - x_K) - \sum_{i=1}^{n} t \cdot \cos\delta' = (x_v - x_k) - \sum_{i=1}^{n} \Delta x = dx$$

8-7. egyenlet

ahol a dy és dx mennyiségeket **koordináta záróhibának** nevezzük. Ha a záróhiba kisebb, mint az ezzel a módszerrel meghatározandó alappontok jellegének megfelelően megállapított hibahatár, akkor a mérést jónak vehetjük, és a mérést kiegyenlíthetjük olyan módon, hogy a kiegyenlített értékekkel számítva nulla záróhibákat kapjunk. A kiegyenlítéskor nem a hosszadalmas szigorú eljárást alkalmazzuk, hanem a már említett közelítő kiegyenlítést. A mérési eredményekből számított oldalvetületeket csak előzetes értéknek tekintjük, és kiszámítva a hosszegységre eső

$$\frac{dy}{\sum_{i=1}^{n} t_i};\ \frac{dx}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

8-8. egyenlet

záróhibákat, az egyes oldalvetületeket megjavítjuk a mért oldalhosszak arányában. Például az 1-2 sokszögoldalra az előzetes és a javított oldalvetületek:

$$\Delta y_{12}^{\text{előzetes}} = t_{12} \cdot \sin \delta'_{12}$$

$$\Delta x_{12}^{\text{előzetes}} = t_{12} \cdot \cos \delta'_{12}$$

és

$$\Delta y_{12}^{\text{kiegyenlített}} = \Delta y_{12}^{\text{előzetes}} + \frac{dy}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \cdot t_{12}$$

$$\Delta x_{12}^{\text{kiegyenlített}} = \Delta x_{12}^{\text{előzetes}} + \frac{dx}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \cdot t_{12}$$

8-9. egyenlet

A kétszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonal számításának lépéseit a következőkben foglaljuk össze:

1. A tájékozó irány irányszögének számítása

2. A sokszögoldalak tájékozott irányértékének számítása

3. Az előzetes oldalvetültetek számítása

4. A koordináta záróhibák és a hosszegységre jutó záróhibák (javítások) számítása

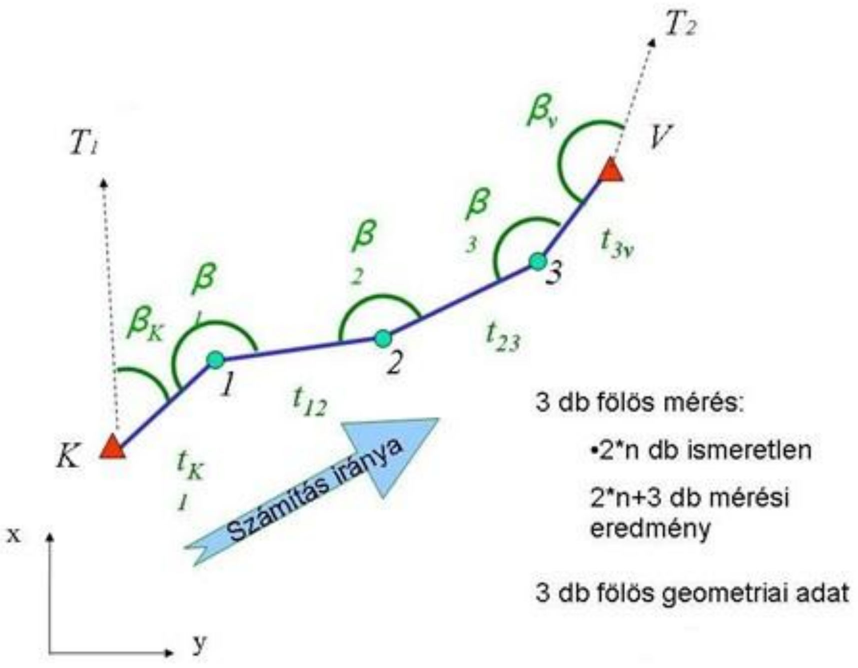
5. A kiegyenlített oldalvetületek számítása

6. A koordináták számítása

Abban az esetben, ha a kezdőponton nem egy, hanem több tájékozó irányt mértünk, a súlyozott középtájékozási szög felhasználásával kell a kezdő sokszögoldal tájékozott irányértékét levezetni ($\beta_K=\delta'_{K1}$).

3.3. 8.3.3 A kétszeresen csatlakozó és kétszeresen tájékozott sokszögvonal

A kétszeresen csatlakozó és kétszeresen tájékozott sokszögvonalat nevezik kétszeresen tájékozott sokszögvonalnak is. Abban különbözik az előző pontban ismertetett kétszeresen csatlakozó, egyszeresen tájékozott sokszögvonaltól, hogy nemcsak a kezdőponton, hanem a végponton is mértünk tájékozó irányt. Adottak tehát a kezdő-és végpont, valamint a tájékozó pontok koordinátái. Mérési eredmények az n+1 darab távolság, valamint az n+2 darab törésszög. Mivel az ismeretlenek száma (az új pontok vetületi koordinátái) nem változott, ennek megfelelően **három fölös mérésünk van**, más megközelítésben a mérési eredményeknek három geometriai feltételt kell kielégíteniük.



Két feltétel megegyezik a kétszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonalnál részletezett feltételekkel, a dy és a dx koordináta zwould be záróhibákkal. A kétszeresen tájékozott sokszögvonalnál ehhez egy harmadik feltétel csatlakozik, amely a tájékozó irányok irányszögei és a mért törésszögek között fejez ki kapcsolatot. A kezdőponton mért tájékozó irány irányszögéből kiindulva a törésszögek felhasználásával levezethető az utolsó sokszögoldal tájékozott irányértéke. Mivel a végponton is mértük a β_v törésszöget, ezért számíthatjuk a végponton mért tájékozó irány δ'_{VT2} tájékozott irányértékét:

$$\delta'_{VT2} = \delta'_{nv} \pm 180 + \beta_v$$

8-10. egyenlet

Kerethibáktól és mérési hibáktól mentes hálózatot feltételezve az ilyen módon levezetett tájékozott irányértéknek egyenlőnek kellene lennie a koordinátákból számítható irányszöggel. Mivel a mérést hibák terhelik, ezért:

$$d\varphi = \delta_{VT2} - \delta'_{VT2}$$

8-11. egyenlet

A dφ értéket **szögzáró hibának** nevezzük. A szögzáró hiba gyakorlati kiszámításához nem szükséges az egyes oldalak tájékozott irányértékeinek számításán keresztül előállítani a végponton mért tájékozó irány tájékozott irányértékét. Előállíthatjuk δ'_{VT2} értékét a kezdőponton a tájékozó pontra számított irányszög és a mért törésszögek függvényeként is. A részletes bizonyítás nélkül:

$$\delta'_{VT2} = \delta_{KT1} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i - (n+1) \cdot 180$$

8-12. egyenlet

Azaz

$$d\varphi = \delta_{VT2} -$$

8-13. egyenlet

$$\delta_{KT1} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i - (n+1) \cdot 180)$$

Ha a szögzáró hiba abszolút értéke a megállapított hibahatárnál nem nagyobb, akkor a szögzáró hibát a törésszögekre egyenlően osztjuk el.

$$\frac{d\varphi}{n+2}$$

8-14. egyenlet

A törésszögek mért értékét olyan módon számítjuk, hogy az előzetes, mért értékhez hozzáadjuk a javítást:

$$\beta_i^{kiegyenlített} = \beta_i^{előzetes} + \frac{d\varphi}{n+2}$$

8-15. egyenlet

A számítást a kiegyenlített törésszögek ismeretében már a kétszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonalnál elmondottak szerint végezzük. A számítás menete a következő:

1. A tájékozó irányok irányszögének számítása

2. A szögzáróhiba és a törésszögek javításának számítása

3. A kiegyenlített törésszögek számítása

4. A sokszögoldalak tájékozott irányértékének számítása

5. Az előzetes oldalvetültetek számítása

6. A koordináta záróhibák és a hosszegységre jutó záróhibák (javítások) számítása

7. A kiegyenlített oldalvetületek számítása

8. A koordináták számítása

Abban az esetben, ha mind a kezdő-, mind a végponton több tájékozó irányt is mértünk, a súlyozott középtájékozási szög felhasználásával számítjuk a kezdőponton az első sokszögoldal tájékozott irányértékét δ'_{K1}-et, a végponton pedig az utolsó sokszögoldal tájékozott irányértékét δ'_{vn}-t. Ilyenkor a kezdőponton mért törésszögnek magát a δ'_{K1} értéket tekintjük:

$$\beta_K = \delta'_{K1}$$

8-16. egyenlet

A végponton mért törésszög:

$$\beta_v = 360 - \delta'_{vn}$$

8-17. egyenlet

Ennek megfelelően mindkét végponton a +x tengellyel párhuzamos irányt tekintjük tájékozó iránynak, azaz:

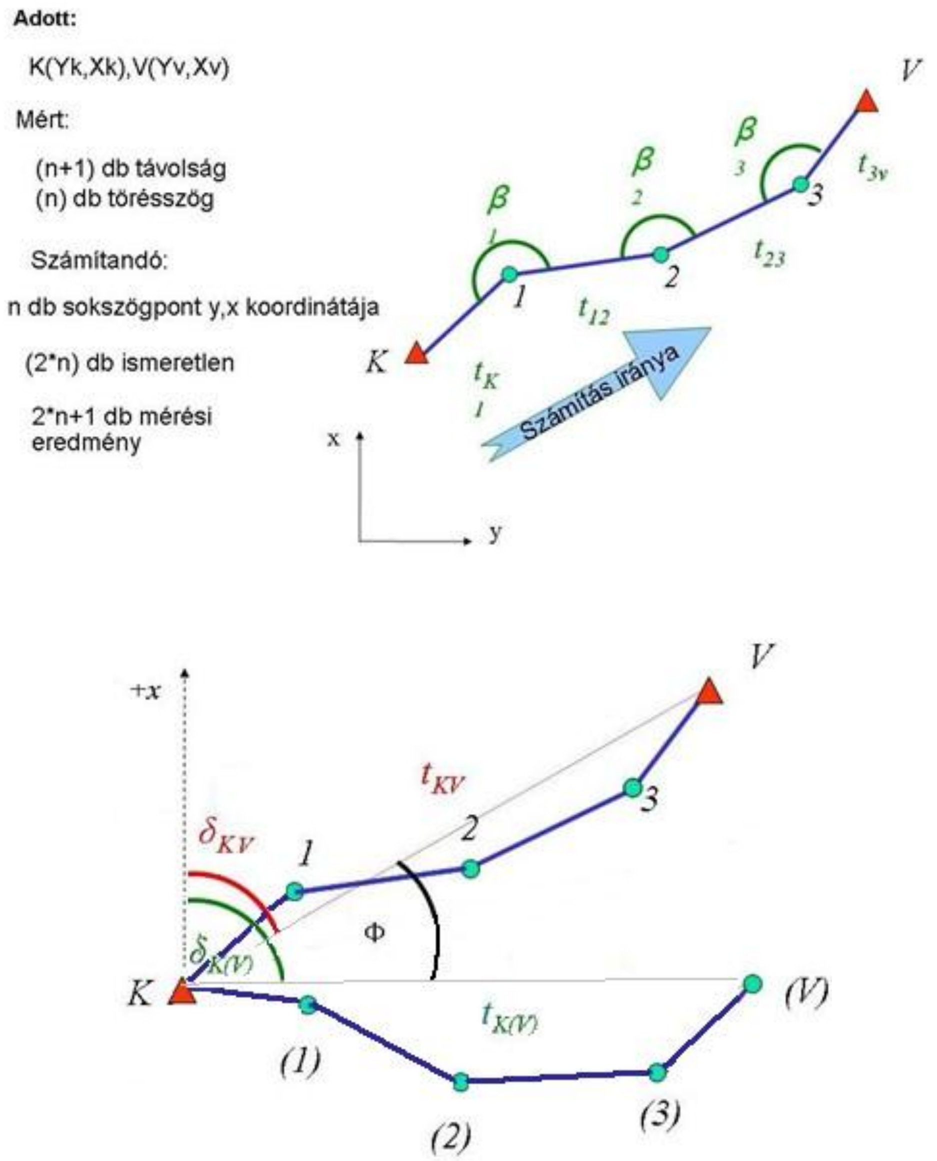
$$\delta_{KT1} = \delta_{VT2} = 0$$

8-18. egyenlet

3.4. 8.3.4 A kétszeresen csatlakozó, tájékozás nélküli (beillesztett sokszögvonal) számítása

Ebben az esetben a sokszögvonal ismert alappontból indul és ismert alappontban végződik, de valamilyek okból tájékozást egyik végponton sem tudunk mérni. (8-5 ábra) A geodéziai gyakorlatban beillesztett sokszögvonal elsősorban sűrűn beépített városok szűk utcáiban, vagy nagy kiterjedésű, zárt erdőkben fordul elő.

A számításhoz adottak a kezdő-és végpont koordinátái; mérési eredményként pedig a távolságok és a törésszögek. A 2n+1 mérési eredményből 2n koordináta számítható, a **fölös mérések száma tehát egy**. A beillesztett sokszögvonal számítását visszavezethetjük a kétszeresen csatlakozó és egyszeresen tájékozott sokszögvonal számítására. Tekintsük a 8-6 ábrát.



8-6. ábra Beillesztett sokszögvonal számítása

Számítsuk ki az 8-6 ábrán φ-el jelölt szöget. A φ kiszámításához vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, melynek kezdőpontja K, +x tengelye pedig a K1 oldallal esik egybe. Ebben az esetben az egyes sokszögoldalak tájékozott irányértékei:

$$\delta'_{K1} = 0$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{K1} \pm 180 + \beta_1$$

....

$$\delta'_{nV} = \delta'_{n-1,n} \pm 180 + \beta_n$$

8-19. egyenlet

Ezeknek a tájékozott irányértékeknek és a mért távolságoknak ismeretében számíthatók a sokszögoldalak vetületei a segéd koordináta-rendszerben. A végpontnak számítjuk az előzetes koordinátáit. (az 8-6 ábrán (V) jelöli az előzetes ponthelyet) Számítsuk ki mind az előzetes, mind a végleges V pontra vonatkozó irányszögeket és távolságokat a K kezdőponttól. Ezután számítsuk a φ elforgatási szöget valamint az m szorzótényezőt:

$$\varphi = \delta_{KV} - \delta_{K(V)}$$

$$m = \frac{t_{KV}}{t_{K(V)}}$$

8-20. egyenlet

Ha a sokszögvonalat φ szöggel elforgatjuk és m értékkel nyújtjuk/zsugorítjuk, akkor a vonal előzetes (V) végpontja a végleges helyre kerül. A sokszögpont koordinátáinak kiszámításához minden oldal előzetes tájékozott irányértékét φ értékével meg kell változtatni; hasonlóan minden mért oldal hosszát az m-szeresére kell változtatnunk. Kiszámítjuk a végleges oldalvetületeket, majd folyamatos összegzéssel a végpont koordinátái. Ennek meg kell egyeznie a végpont ismert koordinátájával (a kerekítési hibáktól eltekintve).

3.5. 8.3.5 Zárt sokszögvonal

Ha a sokszögvonal **kezdő-és végpontja azonos**, akkor a sokszögvonalat **zártnak** nevezzük. A zárt sokszögvonalban a törésszögek összegének elméleti értéke előre ismeretes, hiszen az n oldalú zárt sokszög belső szögeinek összege (n-2)*180, a külső szögeké pedig (n+2)*180.

A zárt sokszögvonalakban mindig felírható egy szögfeltételi egyenlet:

$$d\varphi = (n+2)\cdot 180 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

8-21. egyenlet

Mivel a kezdő és a végpont egybeesik, ezért számítható koordináta záróhiba is:

$$dy = \sum_{i=1}^{n} t \cdot \sin\delta$$

$$dx = \sum_{i=1}^{n} t \cdot \cos\delta$$

8-22. egyenlet

Látszólag a zárt sokszögvonal ugyanolyan kedvező mérési ellenőrzések szempontjából, mint a kétszeresen tájékozott sokszögvonal. Azonban ez nincs így. Mint a bevezetőben már említettük a zárt sokszögvonal érzéketlen a hosszak arányos megváltoztatásai iránt. Ezért a lehetőleg kerüljük a zárt sokszögvonalak vezetését.

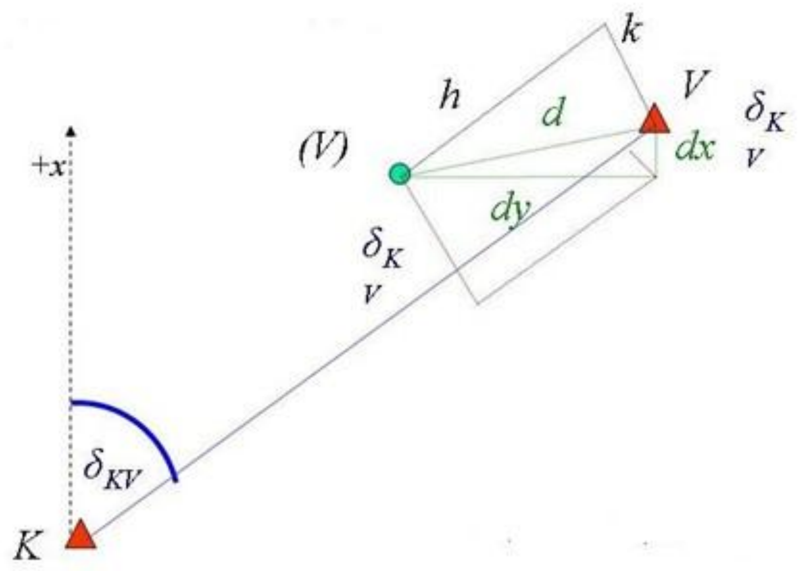
4. 8.4 A hossz- és keresztirányú záróhiba

A hossz- és keresztirányú záróhiba megértéséhez tekintsük a 8-7 ábrát. A dy és dx koordináta záróhibák után számítható a d vonalas (lineáris) záróhiba.

$$d = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

8-23. egyenlet

A sokszögvonal d vonalas záróhibájának nagysága a mérési hibák és a kerethibák együttes hatásától függ. Viszont egy adott d vonalas záróhiba adott koordinátatengely irányú dy és dx összetevői attól is függnek, hogy a sokszögvonal milyen irányban halad a koordináta-tengelyekhez képest. A **dy és dx hibák nagyságából** tehát **nem lehet** közvetlen **következtetéseket** levonni a **mérési hibákra** vonatkozóan.



8-6. ábra A vonalas záróhiba, valamint a hossz-és keresztirányú záróhiba értelmezése

Ha a d vonalas záróhibát a kezdő- és végpont összekötő egyenesével párhuzamos hosszirányú, és erre merőleges keresztirányú összetevőre bontjuk, és feltételezzük, hogy a sokszögvonal ideálisan nyújtott (törésszögei közel 180 fokosak), akkor kerethibától mentes alappontok esetében a hosszirányú záróhiba a távolság meghatározás pontosságától, a keresztirányú záróhiba pedig a szögmérés pontosságától függ. Ezt a két összetevőt különösen akkor ajánlott kiszámítani, ha a d vonalas záróhiba értéke a vártnál nagyobbra adódik. A hossz- és keresztirányú záróhiba:

$$h = dy \cdot \sin\delta_{KV} + dx \cdot \cos\delta_{KV}$$

$$k = dy \cdot \cos\delta_{KV} - dx \cdot \sin\delta_{KV}$$

8-24. egyenlet

A gyakorlati geodéziai munkák végrehajtása során a mérési eredmények és a felhasznált alappontok együttes „minősítésére” az ötödrendű hosszú oldalú és rövid oldalú sokszögelésre vonatkozó hibahatárokat szoktuk figyelembe venni.

Amennyiben a szögzáróhiba és a vonalas záróhiba kielégíti az 8-1. táblázatban lévő feltételeket, a mérést, és a felhasznált alappontokat jónak szoktuk minősíteni.

8-1. táblázat - (Krauter 2002)

sokszögelés	típusa	szögzáróhiba (’’)	vonalas záróhiba (cm)
Ötödrendű hosszú oldalú		28+2n	10+10∑t
rövid oldalú	szabatos	40+2n	6+1.5∑t
	belterületi	55+2.5n	10+2.5∑t
	külterületi	70+3n	14+3.5∑t

Megjegyzések a táblázathoz:

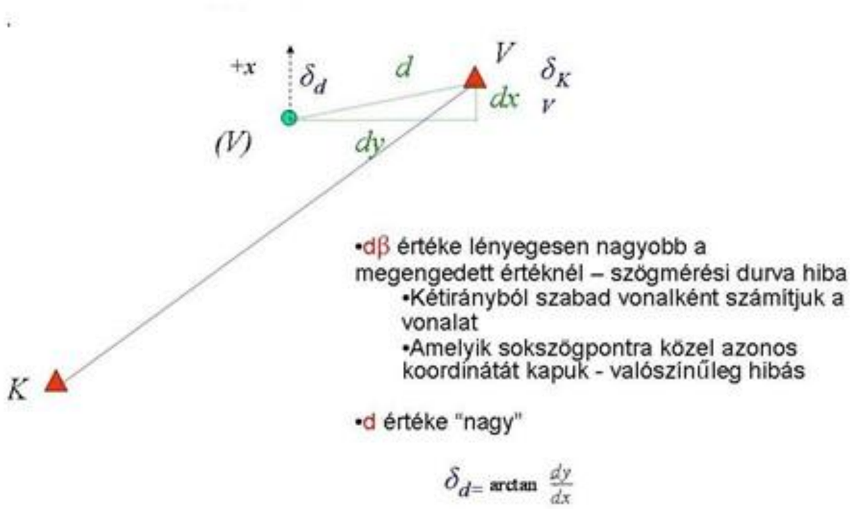
- n a törésszögek száma

- ∑t a sokszögvonal hossza kilométerben

5. 8.5 A mérések során elkövetett durva hiba helyének meghatározása

A kétszeresen csatlakozó, kétszeresen tájékozott sokszögvonal vezetése nem csupán abból a szempontból kedvező, hogy így a lehető legtöbb fölös mérést vesszükfigyelembe a számítás során; ennél a sokszögvonal típusnál lehetősségünk van a szögmérésben, vagy a távolságmérésben elkövetett egy darab durva hiba helyének a meghatározására is. Ilyen módon nem feltétlen kell a teljes sokszögelést megismételni, esetleg lehetőségünk nyílik arra, hogy csak a hibás mérést végezzük el újra.

Azt a sokszögpontot, amelyen a szögmérésben durva hibát követtünk el (erre a hibahatárt meghaladó szögzáró hibából következtethetünk) úgy tudjuk megkeresni, hogy a sokszögvonalat egyszeresen csatlakozó, egyszeresen tájékozott sokszögvonalként a kezdő- és a végpont irányábóll is kiszámítjuk. Amelyik pontra a két számításból közel egyenlő koordinátákat kapunk, annál a pontnál követtük el nagy valószínűséggel a **durva szögmérési hibát**. A számítás alapját az a geometriai tény adja, hogy ennél a pontnál „csavarodik el" a sokszögvonalunk.



8-8. ábra A mérések közben elkövetett durva hiba megkeresése

A **hosszmérésben elkövetett durva mérési hiba** esetén a hibásan mért oldalt azok között az oldalak között kell keresni, amelyek irányszöge közelítőleg egyezik (vagy közelítőleg ellentétes) a kapott – és a durva hiba miatt a megengedettnél jóval nagyobb – vonalas záróhiba irányának irányszögével. (8-8. ábra)

A kedvezőtlen hibaterjedés miatt a szögmérésre különös gondot kell fordítani, Ha magát a szögmérést gondosan hajtjuk végre, akkor a legnagyobb hiba a **műszer és a prizma felállítási hibájából** származhat. Az ebből származó maximális szögmérési hibákat a 8-2. táblázatban foglaltuk össze, jelentős, 1 centiméteres külpontosságot feltételezve (Sárdy, 1970):

8-2. táblázat -

	Δ
10 m	206”
20 m	103”
30 m	69”
50 m	41”

100 m	21”
150 m	14”
300 m	7”

A táblázat adatai szerint a felállításból származó hiba különösen rövid oldalak esetén okoz számottevő szögmérési hibát. Emiatt **a rövid oldalak használata kerülendő**. Rövid oldal fordul elő abban az esetben, amikor kénytelenek vagyunk valamilyen akadályt kikerülni (pl. épület).

6. 8.6 A sokszögelés gyakorlati szabályai

A sokszögvonalakat lehetőség szerint úgy kell vezetni, hogy mind a két végükön **adott alapponthoz csatlakozzanak**, és lehetőség szerint mind a két végpontnál lehessen **tájékozó irányt mérni**. Tájékozó iránynak 200 méternél rövidebb irányt nem szabad felhasználni. Abban az esetben, ha mégis mértünk 200 méternél rövidebb tájékozó irányt, azt a végleges tájékozásban nem használhatjuk fel, csak a durva mérési hibák kiküszöbölésében.

A **sokszögvonal hossza**, azaz a sokszögoldalak összege ne legyen nagyobb 1500 méternél. A sokszögoldalak átlagos hossza ideális esetben 150-200 méter. 50 méteren belül újabb sokszögpontot kijelölni csak a legszükségesebb esetben lehet. Ugyanabban a sokszögvonalban a sokszögoldalak közel egyenlő hosszúak legyenek, mert az iránymérésben kedvező, ha az előre és a hátra irányzást a parallaxis újból és újból való eltűntetése nélkül tudjuk elvégezni. A sokszögvonal nyújtott legyen, a törésszögek közel legyenek a 180 fokhoz.

Ismert koordinátájú alappont mellett elhaladni nem szabad, ahhoz csatlakozni kell. Ennek lehetséges megoldásaival későbbi tanulmányaink során fogunk megismerkedni. A sokszögpontok helyének kiválasztásakor ügyelni kell arra, hogy a pont fennmaradása biztosított legyen, a ponton fel lehessen állni műszerrel, a szomszédos pontokra az irányzást és a mérést akadálytalanul el tudjuk végezni; és ha a sokszögelés részletméréshez készül, akkor úgy válasszuk ki a sokszögpontok helyét, hogy onnan – gazdaságossági okokból – minél több részletpont legyen látható. Abban a gyakori esetben, amikor a sokszögelést a részletméréssel együtt végezzük, akkor a sokszögvonal töréspontjainak mérése minden esetben különüljön el a részletméréstől. Egy célszerűen alkalmazandó mérési sorrend szerint tehát pl. előbb az ismert szabályok szerint mérjük meg az adott törésszöget, és sokszögoldalak hosszát, majd ezután végezzük el a részletmérést. A részletmérést minden esetben horizontzárással fejezzük be.

A **sokszögvonalak nem metszhetik egymást**, csak úgynevezett sokszögelési csomópontban találkozhatnak, melynek mérésével és számításával szintén későbbi tanulmányaink során fogunk találkozni.

7. 8.7 Összefoglalás

A modulban összefoglaltuk a sokszögvonalak típusait, az egyes sokszögvonalak számítási „algoritmusát”. Külön kitértünk a sokszögvonalak vezetésének gyakorlati szabályaira. Kétszeresen csatlakozó és kétszeresen tájékozott sokszögvonal számításánál megtanultuk, hogyan lehet a szögmérésben, illetve a távolság-meghatározásban elkövetett durva hibák helyét megtalálni. Mint a legtöbb geodéziai számítási eljárás, a sokszögvonal számítása is könnyen algoritmizálható. A sokszögvonalak számításának mélyebb megértéséhez javasoljuk az ismertetett algoritmusokon alapuló saját alkalmazás fejlesztését.

Önellenőrző kérdések:

- Hogyan tudná osztályozni a sokszögvonalakat a következő szempontok szerint: alak, fölös mérések száma, csatlakozó pontok száma?/3.oldal/
- Milyen sokszögvonal típusokat ismer a fölös mérések számának függvényében?
- Ismertesse a kétszeresen csatlakozó, egyszeresen tájékozott sokszögvonal számításának lépéseit! /7.oldal/
- Ismertesse a kétszeresen csatlakozó, kétszeresen tájékozott sokszögvonal számításának lépéseit! /9.oldal/
- Ismertesse a kétszeresen csatlakozó, tájékozás nélküli sokszögvonal számításának lépéseit! /12.oldal/

- Hogyan tudja meghatározni a szögmérésben elkövetett durva hiba helyét a kétszeresen csatlakozó, kétszeresen tájékozott sokszögvonalban? /18.oldal/
- Hogyan tudja meghatározni a távmérésben elkövetett durva hiba helyét a kétszeresen csatlakozó, kétszeresen tájékozott sokszögvonalban? /18.oldal/
- Milyen gyakorlati szabályait ismeri a sokszögvonalak vezetésének? /20.oldal/

Irodalomjegyzék

Sárdy Andor: *Geodéziai alapismeretek,* Tankönyvkiadó, 1970

Krauter András: *Geodézia,* Műegyetemi kiadó, Budapest, 2002

Csepregi Szabolcs - Tarsoly Péter: *Geodézia II,* NymE Geoinformatikai kar, Székesfehérvár, 2009