Geometriai példatár 3.

Projektív geometria

Baboss, Csaba, Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar
Szabó, Gábor, Nyugat-Magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Geometriai példatár 3.: Projektív geometria

írta Baboss, Csaba és Szabó, Gábor
Lektor: Németh , László

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Kivonat

Ez a modul a projektív geometria területéről az első fokú alapalakzatok és a másodfokú alapalakzatok témakörébe tartozó feladatokat tartalmazza. Elsősorban a szakterülethez igazodó szerkesztési és számolási feladatokat veszi sorra, a perspektivitástól a két síkrendszer kollineár vonatkozásáig. A feladatgyűjtemény külön fejezetben foglalkozik a centrális axiális affinitás és a centrális kollineáció szerkesztéseivel.

Tartalom

3. fejezet - Projektív geometria

1. 3.1 Bevezetés

A Projektív geometria olyan teljesen új szemléletű geometriai ismereteket tartalmaz, melyek az euklideszi geometriától eltérő sajátosságokra vezetnek. Ebből fakadóan a projektív geometriai feladatokat csak úgy lehet eredményesen megoldani, ha az alapvető fogalmakat ismerjük, és biztonságosan kezeljük.

Ennek elősegítése céljából elméleti összefoglalást adunk az alapvető fogalmakról, összefüggésekről, tételekről. Az elméleti összefoglalással az a célunk, hogy a feladatok megoldása során esetlegesen felmerülő, az elméleti ismeretek hiányából fakadó problémákat gyorsan kezelni tudja az olvasó.

Természetesen ez a kivonatolt elméleti anyag nem helyettesíti, és nem pótolja a Geometria I. jegyzetben megtalálható átfogó ismereteket.

1.1. 3.1.1 Alapvető fogalmak, ismeretek, tételek

- Vetítésre nem változó (projektív) tulajdonságok: - Pont vetülete (képe, megfelelője) pont. - Egyenes vetülete általában egyenes, vagy annak valamilyen részhalmaza (pont). - Illeszkedéstartó (Ha egy pont illeszkedik egy egyenesre, akkor a képe is illeszkedik az egyenes képére.)

- Végtelen távoli pont: Minden egyeneshez hozzárendelünk egy „ideális pontot” (nem valós), melyre úgy gondolunk, hogy az egyenes bármely valós pontjától végtelen távol van, és illeszkedik az egyenesre. Az egyenes egy valós pontjából bármelyik irányba indulva ugyanahhoz a végtelen távoli ponthoz jutunk.

- Elsőfajú alapalakzatok: - pontsor: adott e tartóegyenesre illeszkedő pontok összessége, jele: (e), vagy $e(P_1, P_2$, ...), ahol P_1, P_2, ... a pontsort meghatározó pontok, - sugársor: adott P tartópontra illeszkedő egyenesek összessége, jele: □P□, vagy $P|a_1;b_1;c_1..|$, ahol a_1, b_1, c_1.... A sugársort meghatározó egyenesek, - síksor: adott t egyenesre illeszkedő síkok összessége, jele:[t].

- A perspektivitás kölcsönösen egyértelmű leképezés két elsőfajú alapalakzat között.

- Egy elsőfajú alapalakzat egy másik típusú elsőfajú alapalakzattal akkor van perspektív helyzetben, ha a megfelelő elemek kölcsönösen illeszkednek egymásra.

- Két pontsor akkor van perspektív helyzetben, ha a megfelelő pontok egy sugársor ugyanazon egyenesére illeszkednek.

- Két sugársor akkor van perspektív helyzetben, ha a megfelelő egyenesek egy pontsor ugyanazon pontjára illeszkednek.

- Két síksor akkor van perspektív helyzetben, ha a megfelelő síkok egy sugársor ugyanazon egyenesére illeszkednek.

- Desargues tétele: Ha két háromszög olyan helyzetű, hogy a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át, akkor a megfelelő oldalak egyenesinek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

- Desargues tételének megfordítása: Ha két háromszög olyan helyzetű, hogy a megfelelő oldalak egyenesinek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek, akkor a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át.

- Osztóviszony: Az egy egyenesre illeszkedő A, B és C pontok osztóviszonyán az alábbi kifejezést értjük: $(ABC)=\frac{AC}{CB}$, ahol AC és CB előjeles szakaszhosszakat jelentenek. (Megjegyzés: A szakirodalomban használatos az $(ABC)=\frac{AC}{BC}$ definíció is. Feladatgyűjteményünkben csak az első definíciót alkalmazzuk, igazodva a Geometria I. jegyzetben megtalálható definícióhoz.)

- Az osztóviszony tulajdonságai: - Az osztóviszony értéke független az egyenes irányításától. - Az osztóviszony értéke egy dimenzió nélküli valós szám. - Az osztóviszony értéke párhuzamos vetítésre nem változik (invariáns). - Az osztóviszony értéke bármilyen aránytartó geometriai transzformációra nézve invariáns.

- Sugársor osztóviszonya: A (*P*) sugársor *a*, *b* és *c* egyenesére vonatkozó osztóviszony általános esetben: $(abc)=\dfrac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$, ahol a trigonometrikus értékek az egyes egyenesek által bezárt szögek szinuszai. (Megjegyzés: A szakirodalomban használatos az $(abc)=\dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$ definíció is. Feladatgyűjteményünkben csak az első definíciót alkalmazzuk, igazodva a Geometria I. jegyzetben megtalálható definícióhoz.)

- Párhuzamos egyenesek esetében (azaz közös végtelen távoli pontra illeszkedő sugársor esetén) az osztóviszony: $(abc)=\dfrac{\Delta_{ac}}{\Delta_{cb}}$, ahol Δ a számlálóban is és a nevezőben is az egyes egyenesek távolságát jelenti.

- Síksor osztóviszonya: A [*t*] síksor *A*, *B* és *C* síkjaira vonatkozó osztóviszony általános esetben: $(ABC)=\dfrac{\sin(AC)}{\sin(CB)}$, ahol a trigonometrikus értékek az egyes síkok által bezárt szögek szinuszai. (Megjegyzés: A szakirodalomban használatos az $(ABC)=\dfrac{\sin(AC)}{\sin(BC)}$ definíció is. Feladatgyűjteményünkben csak az első definíciót alkalmazzuk, igazodva a Geometria I. jegyzetben megtalálható definícióhoz.)

- Párhuzamos síkok esetében (azaz közös végtelen távoli egyenesre illeszkedő síksor esetén) az osztóviszony: $(ABC)=\dfrac{\Delta_{AC}}{\Delta_{CB}}$, ahol Δ a számlálóban is és a nevezőben is az egyes síkok távolságát jelenti.

- Pontsor kettősviszonya: Egy egyenesre illeszkedő négy pont *A*, *B*, *C* és *D* esetén, a pontok kettősviszonyán az alábbi kifejezést értjük: $(ABCD)=\dfrac{(ABC)}{(ABD)}=\dfrac{AC}{CB}:\dfrac{AD}{DB}$.

- A kettősviszony dimenzió nélküli szám.

- Projektív koordináták: Ha egy tetszőleges pontsor három pontját (*A*, *B* és *C*) rögzítjük (fix pontok), akkor az egyenes tetszőleges *D* pontjához kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető az (*ABCD*) kettősviszony értéke. Ezt nevezzük a *D* pont projektív koordinátájának.

- A kettősviszony tulajdonságai: $(ABC\infty)=-(ABC)$, $(BACD)=\dfrac{1}{(ABCD)}$, $(BADC)=(ABCD)$, $(CDAB)=(ABCD)$, $(ACBD)+(ABCD)=1$.

- Sugársor kettősviszonya: Egy tartópontra illeszkedő négy egyenes *a*, *b*, *c* és *d* esetén, a pontok kettősviszonyán az alábbi kifejezést értjük: $(abcd)=\dfrac{(abc)}{(abd)}=\dfrac{\sin(ac)}{\sin(cb)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(db)}$.

- Síksor kettősviszonya: Egy tartóegyenesre illeszkedő négy sík *A*, *B*, *C* és *D* esetén, a síkok kettősviszonyán az alábbi kifejezést értjük: $(ABCD)=\dfrac{(ABC)}{(ABD)}=\dfrac{\sin(AC)}{\sin(CB)}:\dfrac{\sin(AD)}{\sin(DB)}$.

- Papposz tétele: Perspektív helyzetben lévő elsőfajú alapalakzatok megfelelő négy-négy elemének kettősviszonya egyenlő.

- A kettősviszony bármely vetítésre nézve invariáns.
- Két elsőfajú alapalakzat projektivitásának három egyenértékű definíciója: I. def.: Ha két elsőfajú alapalakzat elemeit kölcsönösen egyértelmű módon úgy rendeljük egymáshoz, hogy bármely négy elem kettősviszonya egyenlő a megfelelő négy elem kettősviszonyával, akkor ezt a hozzárendelést projektív transzformációnak nevezzük. II. def.: Két elsőfajú alapalakzat akkor projektív, ha egybevágósági (vagy affin) transzformávióval perspektív helyzetbe hozhatók. III. def.: A projektív transzformáció perspektivitások egymásutánjaként (szorzataként) áll elő.
- Perspektív helyzetű síkrendszerek: Két különböző síkrendszer perspektív helyzetű, ha a megfelelő elemeiket egy *O* pontból való vetítéssel nyerjük (*O* lehet ideális pont is). Az *O* a perspektivitás centruma.
- Perspektív helyzetű síkrendszerek tulajdonságai: - A megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át. - A megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.
- Két síkrendszer affin perspektív helyzetű, ha a vetítés *O* centruma egyik síkra sem illeszkedő végtelen távoli pont. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyik sík a másikba térbeli axiális affin transzformációval vihető.
- Az térbeli axiális affinitás tulajdonságai: - A megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át. - A megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. - kölcsönösen egyértelmű - illeszkedéstartó - kettősviszonytartó - térelemtartó - párhuzamosságtartó - osztóviszonytartó
- Két síkrendszer hasonlóan perspektív helyzetű, ha a két tartósík párhuzamos, és a vetítés *O* centruma a végesben van. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyik síkot a másikba térbeli középpontos hasonlóság viszi.
- A térbeli középpontos hasonlóság tulajdonságai: - egyenes és képe párhuzamos - pont és képének egyenese illeszkedik az *O* cenrumra - kölcsönösen egyértelmű - illeszkedéstartó - kettősviszonytartó - térelemtartó - párhuzamosságtartó - osztóviszonytartó - szögtartó - aránytartó
- Két sík egyenlően perspektív helyzetű, ha a két tartósík párhuzamos, és a vetítés *O* centruma a végtelenben van. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyik síkot a másikba eltolás viszi.
- Az eltolás tulajdonságai: - kölcsönösen egyértelmű - illeszkedéstartó - kettősviszonytartó - térelemtartó - párhuzamosságtartó - osztóviszonytartó - szögtartó - aránytartó - távolságtartó
- Projektív síkrendszerek: Két síkrendszer akkor projektív vonatkozású (a két síkot projektív transzformáció viszi egymásba), ha megfelelő elemeit úgy rendeljük egymáshoz, hogy a megfeleltetés: - kölcsönösen egyértelmű - illeszkedéstartó - kettősviszonytartó legyen.
- Projektív transzformációk két nagy csoportja: - Korreláció (egyeneshez pontot, ponthoz egyenest rendelünk) - Kollineáció (pont képe pont, egyenes képe egyenes)
- A kollineáció tulajdonságai: - kölcsönösen egyértelmű - illeszkedéstartó - kettősviszonytartó - térelemtartó
- Ha két sík kollineár vonatkozású (egyik síkot a másikba kollineáció viszi), akkor perspektív helyzetbe hozhatók.
- A kollineáció alaptétele: Ha az *S* síkban lévő *A, B, C, D* és az *S'* síkban lévő *A', B', C', D'* pontnégyesek általános helyzetűek (négyszöget alkotnak), akkor mindig van az *S* síknak az *S'* síkra, egy és csakis egy olyan kollineár leképezése, amelynél az *A, B, C, D,* pontoknak rendre az *A', B', C', D'* pontok felelnek meg (és viszont).
- Az alaptételből következik, hogy a két sík közötti kollineációt egyértelműen meghatározza a síkokban felvett általános helyzetű, egymásnak megfelelő négy-négy pont, illetve négy-négy egyenes.

1.2. 3.1.2 Alapszerkesztések

- Egy pontsor rögzített *A* és *B* alappontpárja és adott (*ABC*) osztóviszony esetén, az osztóviszonyhoz tartozó *C* pont megszerkesztése. (Geometria I. 87. oldal)
- Egy pontsor rögzített *A, B* és *C* alappontjai és adott (*ABCD*) kettősviszony esetén, a kettősviszonyhoz tartozó *D* pont megszerkesztése. (Geometria I. 90. oldal)

- Két projektív pontsor negyedik megfelelőjének szerkesztése perspektív helyzetbe hozással. (Geometria I. 97. oldal)
- Két projektív pontsor negyedik megfelelőjének szerkesztése perspektív tengellyel. (Geometria I. 98. oldal)
- Két projektív pontsor negyedik megfelelőjének szerkesztése perspektív főtengellyel. (Geometria I. 99. oldal)
- Két projektív sugársor negyedik megfelelőjének szerkesztése perspektív helyzetbe hozással. (Geometria I. 102. oldal)
- Két projektív sugársor negyedik megfelelőjének szerkesztése perspektív centrummal. (Geometria I. 103. oldal)
- Két projektív sugársor negyedik megfelelőjének szerkesztése perspektív főcentrummal. (Geometria I. 104. oldal)
- Két projektív sugársor negyedik megfelelőjének szerkesztése papírcsíkos eljárással. (Geometria I. 105. oldal)
- Steiner-féle szerkesztés.
- Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer 4-4 megfelelő pontpárjával. Szerkesztendő az egyik sík tetszőleges (ötödik) pontjának a másik síkon lévő képe. (Geometria I. 119. oldal)
- Adott két affin vonatkozású síkrendszer 3-3 megfelelő pontpárjával. Szerkesztendő az egyik sík tetszőleges (negyedik) pontjának a másik síkon lévő képe. (Geometria I. 120. oldal)
- Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer 4-4 megfelelő pontpárjával. Szerkesztendők az ellentengelyek és képeik. (Geometria I. 121-122. oldal)

2. 3.2 Projektív geometria FELADATOK

2.1. 3.2.1 Elsőfajú alapalakzatok perspektív helyzete

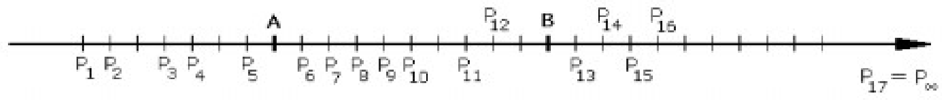
1. Ha egy (e) pontsort egy külső pontból egy síkra vetítünk, milyen alapalakzatot nyerünk?
2. Ha egy (e) pontsort egy külső pontból egy a egyenesre vetítünk, milyen alapalakzatot nyerünk? (a illeszkedik e és P síkjára)
3. Ha egy $|P|$ sugársort egy külső C pontból egy síkra vetítünk, milyen alapalakzatot nyerünk?
4. Ha egy sugársort egy, a tartósíkjára illeszkedő, de a tartópontján nem áthaladó egyenessel elmetszünk, akkor milyen alapalakzatot nyerünk?
5. Ha egy síksort egy tetszőleges - de a t tartójára nem illeszkedő – síkkal elmetszünk, akkor milyen alapalakzatot nyerünk?
6. Ha egy tetszőleges elsőfajú alapalakzatot metszünk vagy vetítünk, akkor milyen alapalakzatot nyerünk?
7. Adott két egyenes. Milyen kölcsönös helyzet esetén létesíthető perspektív helyzet a két egyenes pontjai között, és hogyan? Perspektív helyzet esetén melyek lesznek az önmaguknak megfelelő pontpárok?
8. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ és az $e_2(A_2;B_2;C_2)$ pontsor három-három megfelelő elemével. Hozzuk a két pontsort perspektív helyzetbe, majd szerkesszük meg az ellenpontokat!
9. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ és az $e_2(A_2;B_2;C_2)$ pontsor három-három megfelelő elemével. Hozzuk a két pontsort perspektív helyzetbe, majd szerkesszünk negyedik és ötödik megfelelő elempárt!
10. Adott a $P_1|a_1;b_1;c_1|$ és a $P_2|a_2;b_2;c_2|$ sugársor három-három megfelelő elemével. Hozzuk a két sugársort perspektív helyzetbe, majd szerkesszünk negyedik és ötödik megfelelő sugárpárt!
11. Adott a $P_1|a_1;b_1;c_1|$ és a $P_2|a_2;b_2;c_2|$ sugársor három-három megfelelő elemével. Szerkesszük meg a közös $n_1=m_2|P_1P_2|$ sugarak n_2 , illetve m_1 megfelelőit, perspektív helyzetbe hozással!

12. Adott az $e(A;\ B;\ C)$ pontsor és a $P|a;b;c|$ sugársor három-három megfelelő elemével. Szerkesszük meg (perspektív helyzetbe hozással): a) az AB szakasz F felezőpontjának megfelelő f sugarat, b) a BC szakasz H harmadoló pontjának megfelelő h sugarat, c) az a és b sugarak által bezárt szög s szögfelezőjének megfelelő S pontot, d) a b és c sugarak által bezárt szög t szögfelezőjének megfelelő T pontot!

13. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ és az $e_2(A_2;B_2;C_2)$ pontsor három-három megfelelő elemével. Hozzuk a két pontsort perspektív helyzetbe, majd szerkesszük meg: a) az (e_1) pontsoron az A_1 ponttól 2 cm-re lévő pontoknak az (e_2) pontsoron lévő megfelelőit, b) a B_1C_1 szakasz F_1 felezőpontjának az (e_2) pontsoron lévő megfelelőjét, c) az A_2B_2 szakasz egyik H_2 harmadoló pontjának H_1 megfelelőjét, d) az (e_2) pontsoron a C_2 ponttól 1 cm-re pontoknak az (e_1) pontsoron lévő megfelelőit!

2.2. 3.2.2 Osztóviszony, kettősviszony

1. Számítsuk ki az alábbi ábrán adott (e) pontsor P_i (i=1, 2, 3, ...,17) pontjaihoz tartozó osztóviszony értékét az A, B alappontokra vonatkoztatva:



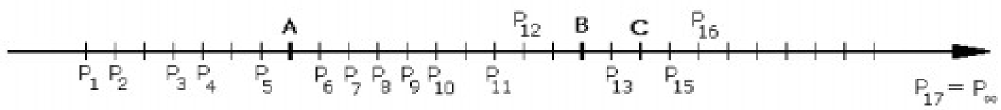
2. Adott az (e) pontsor és azon a rögzített A, B alappontok. Szerkesszük meg a pontsor azon C, D, E, ..., N pontjait, amelyeknek az A, B alappontokhoz tartozó osztóviszonyaik: a) $(ABC)=\frac{1}{3}$ f) $(ABH)=-\frac{1}{6}$ b) $(ABD)=\frac{3}{5}$ g) $(ABI)=-\frac{4}{5}$ c) $(ABE)=0{,}7$ h) $(ABK)=-0{,}5$ d) $(ABF)=8$ i) $(ABL)=-0{,}4$ e) $(ABG)=-2$ j) $(ABM)=-5$ k) $(ABN)=-1$

3. Adott egy e egyenes és azon az A, B és C pontok úgy, hogy (ABC)=3. Az egyenest egy tetszőleges irányból – párhuzamos vetítést alkalmazva – egy S síkra vetítjük. Az egyenes képe e', a pontoké A', B', C'. Határozzuk meg az $(A'B'C')$ osztóviszony értékét!

4. Adott egy e egyenes és azon az A, B és C pontok úgy, hogy (ABC)=7. Az e egyenest egy tetszőleges P pontból egy S síkra vetítjük. Az egyenes képe e', a pontoké A', B', C'. Határozzuk meg az $(A'B'C')$ osztóviszony értékét az alábbi esetekben: a) e párhuzamos S-sel, b) e metszi az S síkot!

5. Tekintsük azt a sugársort, amelyiknek P tartópontja egybeesik egy óra számlapjának középpontjával, a sugársor azon elemeit pedig, amelyek egész számmal jelzett pontot kötnek össze, a megfelelő számmal jelöljük. (Például (1,3,8) azon sugarakhoz tartozó osztóviszonyt jelenti, amelyek a középpontot az 1-es, 3-as és 8-as számmal jelzett pontot kötik össze az óra számlapján.) Határozzuk meg az alábbi sugárhármasokhoz tartozó osztóviszonyok értékét: a) (8,4,12)= g) (8,4,6)= b) (8,4,1)= h) (8,4,7)= c) (8,4,2)= i) (8,4,8)= d) (8,4,3)= j) (8,4,9)= e) (8,4,4)= k) (8,4,10)= f) (8,4,5)= l) (8,4,11)=

6. Számítsuk ki az alábbi ábrán adott (e) pontsor P_i (i=1, 2, 3,...,19) pontjaihoz tartozó kettősviszony értékét! (Az A, B és C pontok a pontsor rögzített pontjai)



7. Adott az (e) pontsor és azon a rögzített A, B és C pontok. Az alábbi szakaszok előjeles hossza: AB=10 cm, BC=-2 cm. Szerkesszük meg a pontsor azon D, E, ... pontjait, amelyeknek az A, B, C adott pontokkal alkotott kettősviszonyaik: a) $(ABCD)=8$ i) $(ABCM)=\frac{5}{7}$ b) $(ABCE)=5$ j) $(ABCO)=\frac{3}{4}$ c) $(ABCF)=3$ k) $(ABCP)=-1$ d) $(ABCG)=1$ l) $(ABCR)=-2$ e) $(ABCH)=0{,}4$ m)

$(ABCS) = -4$ f) $(ABCI) = 0{,}8$ n) $(ABCT) = -20$ g) $(ABCK) = 0{,}2$ o) $(ABCU) = -0{,}4$ h) $(ABCL) = \frac{2}{3}$ p) $(ABCV) = -\frac{2}{3}$

8. Adott egy *e* egyenes és azon az *A, B, C* és *D* pontok úgy, hogy (*ABCD*)=2. Az egyenest egy tetszőleges irányból – párhuzamos vetítést alkalmazva – egy *S* síkra vetítjük. Az egyenes képe *e’*, a pontoké *A’*, *B’*, *C’*, *D’*. Határozzuk meg az (*A’ B’ C’ D’*) kettősviszony értékét az alábbi esetekben: a) *e* párhuzamos *S*-sel, b) *e* metszi az *S* síkot!

9. Adott egy *e* egyenes és azon az *A, B, C* és *D* pontok úgy, hogy (*ABCD*)=5. Az egyenest egy tetszőleges *P* pontból egy *S* síkra vetítjük. Az egyenes képe *e’*, a pontoké *A’*, *B’*, *C’*, *D’*. Határozzuk meg az (*A’ B’ C’ D’*) kettősviszony értékét az alábbi esetekben: a) *e* párhuzamos *S*-sel, b) *e* metszi az *S* síkot!

10. Tekintsük azt a sugársort, amelyiknek *P* tartópontja egybeesik egy óra számlapjának középpontjával, a sugársor azon elemeit pedig, amelyek egész számmal jelzett pontot kötnek össze, a megfelelő számmal jelöljük. (Például (1,7,5,2) azon sugarakhoz tartozó kettősviszonyt jelenti, amelyek a középpontot az 1-es, 7-es, 5-ös és 2-es számmal jelzett pontot kötik össze az óra számlapján.) Határozzuk meg az alábbi sugárnégyesekhez tartozó kettősviszonyok értéket: a) (8,4,5,1)= e) (8,4,5,5)= i) (8,4,5,9)= b) (8,4,5,2)= f) (8,4,5,6)= j) (8,4,5,10)= c) (8,4,5,3)= g) (8,4,5,7)= k) (8,4,5,11)= d) (8,4,5,4)= h) (8,4,5,8)= l) (8,4,5,12)=

11. Legyen az, egy egyenesre illeszkedő *A, B, C* és *D* pontnégyes kettősviszonyának értéke egy *k* szám. A kettősviszony tulajdonságait felhasználva, határozzuk meg ugyanazon négy pont alábbi elrendezéseihez tartozó kettősviszonyok értékét: a) (*BADC*)= j) (*CADB*)= b) (*CDAB*)= k) (*DBCA*)= c) (*DACB*)= l) (*ADCB*)= d) (*DCBA*)= m) (*BCDA*)= e) (*CBDA*)= n) (*CDBA*)= f) (*ACBD*)= o) (*DABC*)= g) (*ADBC*)= p) (*DBAC*)= h) (*BDAC*)= r) (*ACDB*)= i) (*BCAD*)= s) (*CBAD*)=

12. Jelöljük egy téglalap csúcsait *A, B, C, D* betűkkel, a szimmetria-középpontját pedig *O*-val. A téglalap rövidebbik oldala 3 cm, hosszabbik oldala 4 cm. Határozzuk meg az alábbi pontnégyesekhez tartozó kettősviszony értékét: a) (*ABOC*)= b) (*BOCD*)= c) (*DABO*)=

13. Egy sugársor sorozópontja *P*, sorozósíkja *S*. E sugársor azon *a, b, c, d* elemnégyesét, amelyre (*abcd*)=-4 fennáll, elmetsszük egy tetszőleges *P*-re nem illeszkedő – de az *S* síkban lévő – *e* egyenessel. A megfelelő sugarakkal alkotott metszéspontokat jelöljük rendre: *A, B, C, D* betűvel. Határozzuk meg az (*ABCD*) kettősviszony értékét!

14. Egy síksor tetszőleges *A, B, C* és *D* elemnégyeséhez tartozó kettősviszony értéke (*ABCD*)=2. Messük el a síksor elemeit egy tetszőleges – de a *t* tartóegyenesre nem illeszkedő – *S* síkkal. Az *S* sík a síksor elemeit, a sugársort alkotó *a, b, c* és *d* sugárnégyesben metszi. Határozzuk meg az (*abcd*) kettősviszony értékét!

15. Egy síksor tetszőleges *A, B, C* és *D* elemnégyeséhez tartozó kettősviszony értéke (*ABCD*)=-5. Messük el a síksor elemeit egy tetszőleges – de a *t* tartóegyenesre nem illeszkedő – *e* egyenessel. Az *e* egyenes a síksor elemeit, a pontsort alkotó *A, B, C* és *D* pontnégyesben metszi. Határozzuk meg az (*ABCD*) kettősviszony értékét!

2.3. 3.2.3 Elsőfajú alapalakzatok projektív vonatkozása (jele: $\overline{\wedge}$)

1. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ $\overline{\wedge}$ $e_2(A_2;B_2;C_2)$ és az (e_1) pontsor adott A_1, B_1 pontjai által meghatározott szakasz F_1 felezőpontja, továbbá az (e_2) pontsor C_2 pontjától 2 cm-re lévő G_2 és H_2 pontok. Szerkesszük meg az adott pontok megfelelőit (F_2, G_1 és H_1 pontokat) perspektív tengely segítségével!

2. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ $\overline{\wedge}$ $e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszük meg az ellenpontokat perspektív tengely segítségével!

3. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ $\overline{\wedge}$ $e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszük meg a tartóegyenesek közös M_1=N_2 pontjának M_2, N_1 megfelelőit perspektív tengely közbeiktatásával!

4. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1)$ $\overline{\wedge}$ $e_2(A_2;B_2;C_2)$ és az (e_1) pontsor B_1C_1 szakaszának H_1, K_1 harmadoló pontjai. Szerkesszük meg az adott pontok H_2, K_2 megfelelőit perspektív főtengely közbeiktatásával!

5. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszük meg az ellenpontokat perspektív főtengely segítségével!

6. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszük meg a tartóegyenesek közös pontjának megfelelőit perspektív főtengely közbeiktatásával!

7. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszünk tetszőleges negyedik megfelelő elempárt: a) perspektív helyzetbe hozással, b) papírszalagos eljárás alkalmazásával!

8. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszük meg az ellenpontokat: a) perspektív helyzetbe hozással, b) papírszalagos eljárás alkalmazásával!

9. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2;C_2)$. Szerkesszük meg a tartóegyenesek közös pontjának megfelelőit: a) perspektív helyzetbe hozással, b) papírszalagos eljárás alkalmazásával!

10. Adott az $e_1(A_1;B_1;Q_{\infty 1}) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2; Q_{\infty 2})$. Szerkesszük meg az A_1B_1 szakasz harmadoló pontjainak megfelelőit: a) perspektív tengellyel, b) perspektív főtengellyel, c) perspektív helyzetbe hozással, d) papírszalagos eljárás alkalmazásával!

11. Adott a $P_1|a_1;b_1;c_1| \overline{\wedge} P_2|a_2;b_2;c_2|$. Szerkesszük meg az $(a_1;b_1)\angle\ f_1$ szögfelezőjének és a $(b_2;c_2)\angle\ h_2$ szögfelezőjének f_2 illetve h_1 megfelelőit: a) perspektív centrummal b) perspektív főcentrummal c) perspektív helyzetbe hozással, d) papírszalagos eljárással!

12. Adott a $P_1|a_1;b_1;c_1| \overline{\wedge} P_2|a_2;b_2;c_2|$. Szerkesszük meg a tartópontok közös m_1=n_2 egyenesének m_2, n_1 megfelelőit: a) perspektív centrummal b) perspektív főcentrummal c) perspektív helyzetbe hozással, d) papírszalagos eljárással!

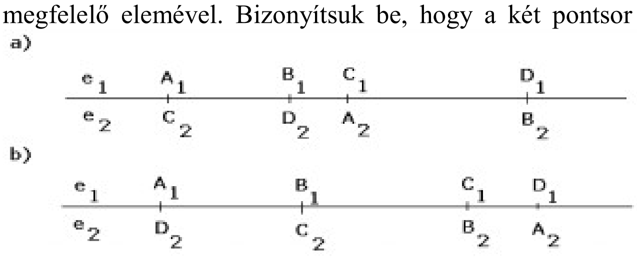
13. Adott az $e_1(A_1;B_1;C_1) \overline{\wedge} e_2(A_2;B_2;C_2)$, ahol $e_1 \equiv e_2$ (tehát két, közös tartóegyenesen lévő projektív pontsor). Steiner féle kör közbeiktatásával szerkesszünk: a) tetszőleges negyedik megfelelő elempárt, b) ellenpontokat, c) kettős pontokat, majd határozzuk meg, hogy milyen a pontsorok projektivitása!

14. Adott két, közös tartón lévő projektív pontsor, három-három megfelelő elemével. Szerkesszünk tetszőleges negyedik megfelelő elempárt: a) perspektív helyzetbe hozással, b) papírszalagos eljárás alkalmazásával.

15. Adott két, közös tartón lévő projektív pontsor, három-három megfelelő elemével. Szerkesszük meg az ellenpontokat: a) perspektív helyzetbe hozással, b) papírszalagos eljárás alkalmazásával, c) kettőspontokat, majd határozzuk meg, hogy milyen a pontsorok projektivitása!

16. Adott két, közös tartón lévő projektív sugársor, három-három megfelelő elemével. Steiner féle kör közbeiktatásával szerkesszünk: a) tetszőleges negyedik megfelelő elempárt, b) kettős sugarakat!

17. Az alábbi ábrákon két, közös tartón lévő pontsort vettünk fel – a korábbi esetektől eltérően – négy-négy megfelelő elemével. Bizonyítsuk be, hogy a két pontsor (e_1 és e_2) projektív kapcsolatban áll egymással!



18. Adott két kongruens (egybevágó) pontsor, négy-négy megfelelő elemével. Szerkesszük meg: a) ellenpontokat, b) tetszőleges ötödik megfelelő elempárt!

19. Egy autópálya egyenes szakaszán az alábbi objektumok vannak: vasúti aluljáró (A), közúti felüljáró (F), alagút bejárata (B). Az A, F és B objektumok térképünkön fel vannak tüntetve. Az említett autópályán egy parkolót (P) létesítenek. Hogyan tudjuk ezt feltérképezni, egyetlen légi fénykép alapján? (Állapítsuk

előbb meg, hogy a térkép és a légi fénykép között milyen projektív geometriai kapcsolat van, majd végezzük el a szerkesztést!)

2.4. 3.2.4 Másodfajú alapalakzatok

1. Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer, négy-négy megfelelő pontjával, továbbá az S_2 síkrendszernek egy tetszőleges P_2 pontja. Szerkesszük meg a P_2 pont S_1 síkrendszerbeli megfelelőjét. A szerkesztést hányféleképpen lehet elvégezni?

2. Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer, négy-négy megfelelő pontjával, továbbá az S_1 síkrendszernek egy tetszőleges e_1 egyenese. Szerkesszük meg az egyenesnek a másik síkrendszerben lévő megfelelőjét!

3. Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer, négy-négy megfelelő egyenesével, továbbá az S_1 síkrendszernek egy tetszőleges X_1 pontja. Szerkesszük meg az adott pont X_2 megfelelőjét!

4. Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer, négy-négy megfelelő egyenesével, továbbá az S_2 síkrendszernek egy olyan e_2 egyenese, amely illeszkedik az a_2, b_2 egyenesek A_2 metszéspontjára. Szerkesszük meg az e_2 egyenes e_1 megfelelőjét!

5. Egy sík terepen az alábbi objektumok úgy helyezkednek el, hogy kettőnél több nem esik egy egyenesre: templom (T), toronyház (A), szálloda (H), emlékmű (E). Térképünkön az említett objektumok szerepelnek (A'; T', H', E'). Az említett terepen egy új objektumot (U) létesítenek. Hogyan tudjuk ezt feltérképezni egyetlen légi fénykép alapján? (Állapítsuk előbb meg, hogy a térkép és a légi fénykép között milyen projektív geometriai kapcsolat van!)

6. Egy S sík terepen az A, B, C és D objektumok úgy helyezkednek el, hogy kettőnél több nem illeszkedik egy egyenesre, erről egy F_1 filmfelvételünk van. A terepen egy újabb (E) objektum létesült. Ezután a terepről egy újabb F_2 filmfelvételt készítünk. Ennek segítségével szerkesszük meg az F_1 légi fénykép felvételén az E objektum F_1 képét. (Állapítsuk előbb meg, hogy az F_1 és F_2 felvételek síkrendszerei között milyen projektív geometriai kapcsolat van!)

7. Adott két kollineár vonatkozású síkrendszer, négy-négy megfelelő egyenesével. Szerkesszük meg az ellentengelyeket!

8. A középiskolában megismert középpontos hasonlóság milyen projektív geometriai fogalommal hozható kapcsolatba?

9. A középiskolában megismert hasonlóság milyen projektív geometriai fogalommal hozható kapcsolatba?

10. A középiskolában megismert egybevágósági transzformációk (tengelyes tükrözés, pontra való tükrözés, forgatás, eltolás) milyen projektív geometriai fogalommal hozható kapcsolatba?

11. Adott az e egyenes és az arra illeszkedő A, B, C és D pontok. Az ugyancsak adott e^* egyenesen három pont - A^*, B^* és C^* - adott. Szerkesszük meg az e^* egyenes azon D^* pontját, amelyre $(ABCD)=(A^*B^*C^*D^*)$ teljesül!

2.5. 3.2.5 Axiális (tengelyes) affinitás

1. Adott az ortogonális affinitás tengelyével, és megfelelő pontpárjával, továbbá egy négyzet egyik rendszerbeli képe. Szerkesszük meg a négyzet másik rendszerbeli megfelelőjét!

2. Adott a klinogonális affinitás tengelyével, és megfelelő pontpárjával, továbbá egy téglalap. Szerkesszük meg a téglalap másik rendszerbeli megfelelőjét!

3. Adott egy affinitás tengelye és iránya. Határozzuk meg megfelelő pontpárját úgy, hogy egy adott paralelogramma megfelelője rombusz legyen!

4. Adott egy affinitás tengelye és iránya. Határozzuk meg megfelelő pontpárját úgy, hogy egy adott paralelogramma megfelelője téglalap legyen!

5. Adott az ortogonális affinitás tengelyével, és P, P' megfelelő pontpárjával, továbbá egy egyenes egyik (például a „vesszős") rendszerbeli képe. Szerkesszük meg az egyenes másik rendszerbeli megfelelőjét!

6. Adott az affinitás tengelyével és *P*, *P'* megfelelő pontpárjával. Határozzuk meg a *P*-re illeszkedő *a*, *b* egyeneseket és a *P'*-re illeszkedő *a'*, *b'* képeiket úgy, hogy $a \perp b$ és az $a' \perp b'$ teljesüljön!

7. Adott az affinitás tengelye és iránya, továbbá az *ABC* háromszög, melynek *A* és *B* csúcsai a tengelyre illeszkednek. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az *ABC* háromszög *A'B'C'* képe egyenlőszárú háromszög legyen!

8. Adott az ortogonális affinitás tengelye és egy *ABC* háromszög. Határozzuk meg az ortogonális affinitást úgy, hogy az *ABC* háromszög *A'B'C'* képe derékszögű háromszög legyen, és a derékszög az *A'* csúcsnál legyen!

9. Adott a klinogonális affinitás tengelyével, és egy megfelelő pontpárjával, továbbá egy trapéz egyik rendszerbeli képe úgy, hogy párhuzamos oldalai párhuzamosak a tengellyel. Szerkesszük meg a trapéz másik rendszerbeli megfelelőjét!

10. Adott az affinitás tengelye és egy paralelogramma. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy a paralelogramma megfelelője négyzet legyen.

11. Kis- és nagytengelyével adott egy ellipszis. Az affinitás alkalmazásával szerkesszünk további ellipszis pontokat, majd görbe vonalzó segítségével rajzoljuk meg a görbét!

12. Tengelypárjával adott egy ellipszis, továbbá egy olyan egyenes, amelyik illeszkedik a kistengely egyik végpontjára, s a nagytengellyel 60°-os szöget zár be. Szerkesszük meg az egyenesnek az ellipszissel alkotott metszéspontjait!

13. Tengelypárjával adott egy ellipszis, továbbá egy olyan *P* pont, amelyik két szomszédos tengelyvégponttól 8-8 cm-re van. Szerkesszünk e külső pontból az ellipszishez érintőket!

14. Adott egy ellipszis kis- és nagytengelyével. Szerkesztendő az ellipszisnek egy tetszőleges pontja, továbbá a görbének e pontbeli érintője.

15. Adott egy ellipszis kis- és nagytengelyével. Szerkesztendők az alábbi egyeneseknek az ellipszissel alkotott metszéspontjai: a) az *e* egyenes merőleges a kistengelyre, b) az *f* egyenes merőleges a nagytengelyre.

16. Adott egy ellipszis kis- és nagytengelyével, továbbá egy egyenes. Szerkesztendők az ellipszis azon érintői, amelyek az adott egyenessel párhuzamosak.

17. Adott az ellipszis nagytengelye és egy érintője. Szerkesztendő az *E* érintési pont és az ellipszis kistengelye.

18. Adott az ellipszis nagytengelye és egy *P* pontja. Szerkesztendő a kistengely.

19. Adott az ellipszis két tengelyének egyenese és egy érintője az *E* érintési ponttal. Szerkesztendők az ellipszis tengelyei.

20. Adott az ellipszis két tengelyének egyenese és két pontja *A*, *B*. Szerkesztendők az ellipszis tengelyei.

2.6. 3.2.6 Centrális kollineáció

1. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye és két megfelelő pontpárja. Szerkesztendő a kollineáció centruma.

2. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma, és *P*, *P'* megfelelő pontpárja, továbbá egy *a'* egyenes, amely nem illeszkedik a *P'* pontra. Szerkesztendő az *a'* egyenes másik rendszerbeli megfelelője.

3. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye, továbbá egy *A* pont. Szerkesztendő az adott pont másik rendszerbeli megfelelője.

4. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és r ellentengelye, továbbá egy *A'* pont. Szerkesztendő az adott pont másik rendszerbeli megfelelője.

5. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye, továbbá egy *A* pont. Szerkesztendő az adott pont másik rendszerbeli megfelelője.

6. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye, továbbá egy *A'* pont. Szerkesztendő az adott pont másik rendszerbeli megfelelője.

7. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *P*, *P'* megfelelő pontpárja, továbbá az *a* és *b* párhuzamos egyenespár. Szerkesztendők az adott egyenesek másik rendszerbeli megfelelői. Az *a'* és *b'* egyenesek *M'* metszéspontjáról mit állíthatunk?

8. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye, továbbá az *a* és *b* párhuzamos egyenespár. Szerkesztendők az adott egyenesek másik rendszerbeli megfelelői.

9. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye, továbbá az *a* és *b* párhuzamos egyenespár. a) Szerkesztendők az adott egyenesek másik rendszerbeli megfelelői. b) Az *a'* és *b'* egyenesek *M'* metszéspontjáról mit állíthatunk?

10. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye. Szerkesztendő a *q'* ellentengely.

11. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye. Szerkesztendő az *r* ellentengely.

12. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *P*, *P'* megfelelő pontpárja. Szerkesztendő az *r* ellentengely.

13. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *P*, *P'* megfelelő pontpárja. Szerkesztendő az *q'* ellentengely.

14. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye, továbbá az *a'* és *b'* párhuzamos egyenespár. Szerkesztendők az adott egyenesek másik rendszerbeli megfelelői.

15. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye, továbbá az *a'* és *b'* párhuzamos egyenespár. Szerkesztendők az adott egyenesek másik rendszerbeli megfelelői.

16. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye, továbbá egy tengellyel párhuzamos *e* egyenes. Szerkesztendő az adott egyenes másik rendszerbeli *e'*megfelelője.

17. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye, továbbá egy tengellyel párhuzamos *e* egyenes. Szerkesztendő az adott egyenes másik rendszerbeli *e'* megfelelője.

18. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *q'* ellentengelye, továbbá egy *A'B'C'* háromszög. Szerkesztendő a síkidom másik rendszerbeli megfelelője.

19. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye, továbbá egy *A'B'C'D'* paralelogramma. Szerkesztendő a síkidom másik rendszerbeli megfelelője.

20. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *r* ellentengelye, továbbá egy *ABCD* trapéz. Szerkesztendő a síkidom másik rendszerbeli megfelelője.

21. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye, *C* centruma és *P*, *P'* megfelelő pontpárja. Szerkesszük meg a *P*, *P'* pontokon átmenő a) *e* egyenes végtelen távoli pontjának a másik rendszerben lévő megfelelőjét, b) *e'* egyenes végtelen távoli pontjának a másik rendszerben lévő megfelelőjét.

22. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye és *r* ellentengelye, továbbá egy *a*, *b* metsző egyenespár. Szerkesztendő a *C* centrum úgy, hogy az egyenesek *a'*, *b'* megfelelői merőlegesek legyenek egymásra.

23. Adott a centrális kollineáció *t* tengelye és *q'* ellentengelye, továbbá egy *a'*, *b'* metsző egyenespár. Szerkesztendő a *C* centrum úgy, hogy az egyenesek *a*, *b* megfelelői adott α szöget zárjanak be.

24. Adott az *ABCD* általános négyszög, az *A* pontnak megfelelő *A'* pont, továbbá a centrális kollineáció *t* tengelyének egy *T* pontja. Határozzuk meg a centrális kollineációt úgy, hogy az általános négyszög másik rendszerbeli megfelelője téglalap legyen!

25. Adott az *ABCD* általános négyszög, az *A* pontnak megfelelő *A'* pont, továbbá a centrális kollineáció *t* tengelyének egy *T* pontja. Határozzuk meg a centrális kollineációt úgy, hogy az általános négyszög másik rendszerben lévő megfelelője rombusz legyen!

26. Adott egy általános négyszög, továbbá a centrális kollineáció *t* tengelyének egy *T* pontja. Határozzuk meg a centrális kollineációt úgy, hogy az általános négyszög másik rendszerben lévő megfelelője négyzet legyen!

27. Adott a centrális kollineáció *C* centrumával és három megfelelő pontpárjával. Szerkesszük meg a kollineáció tengelyét!

3. 3.3 Projektív geometria MEGOLDÁSOK

3.1. 3.3.1 Elsőfajú alapalakzatok perspektív helyzete (Megoldások)

1. Ha a vetület pontsort (*e'*)-vel jelöljük, akkor (*e*) pespektív (*e'*)-vel.

2. (*e*) pespektív (*e'*)-vel.

3. Ha a sugársor vetületét |*P'*|-vel jelöljük, akkor |*P*| perspektív |*P'*|-vel.

4. Ha az elmetszett sugársort |*P*|-vel jelöljük, a sugársorból a sík által kimetszett pontsort (*m*)-mel jelöljük, akkor (*m*) perspektív |*P*|-vel.

5. Ha a [*t*] síksorból kimetszett sugársort |*P*|-vel jelöljük, akkor |*P*| perspektív [*t*]-vel.

6. Ha egy tetszőleges elsőfajú alapalakzatot metszünk vagy vetítünk, eredményül mindig az eredetivel perspektív helyzetű alapalakzatot nyerünk.

7. Ha a két egyenes metsző, akkor egy *P* külső pontból való vetítéssel perspektív helyzetet hozhatunk létre. Ha a *P* pont a végtelenben van, akkor *hasonlóan perspektív* helyzet jön létre. Az önmaguknak megfelelő pontpárok (fixpontok) a két egyenes közös pontjai (metszéspontjai) lesznek. Ha a két egyenes párhuzamos, akkor egy külső *P* pontból való vetítéssel létesített perspektivitás *hasonlóan perspektív* helyzet lesz. Ha a két egyenes párhuzamos, és egy végtelen távoli *P* pontból vetítünk, akkor a két pontsor perspektivitása (a legspeciálisabb) *egyenlően perspektív* helyzetet eredményez.

A 8-13. feladatok alapszerkesztések, melyeket a jegyzetben található szerkesztési leírás alapján hajthatunk végre.

3.2. 3.3.2 Osztóviszony, kettősviszony (Megoldások)

1. $(ABP_1)=\frac{-7}{17}$ $(ABP_7)=\frac{2}{8}$ $(ABP_{13})=\frac{11}{-1}=-11$ $(ABP_2)=\frac{-6}{16}$ $(ABP_8)=\frac{3}{7}$ $(ABP_{14})=\frac{12}{-2}=-6$ $(ABP_3)=\frac{-4}{14}$ $(ABP_9)=\frac{4}{6}$ $(ABP_{15})=\frac{13}{-3}$ $(ABP_4)=\frac{-3}{13}$ $(ABP_{10})=\frac{5}{5}=1$ $(ABP_{16})=\frac{14}{-4}$ $(ABP_5)=\frac{-1}{11}$ $(ABP_{11})=\frac{7}{3}$ $(ABP_{17})=-1$ $(ABP_6)=\frac{1}{9}$ $(ABP_{12})=\frac{8}{2}=4$.

2. A feladat alapszerkesztés, melyet a jegyzetben található szerkesztési leírás alapján hajthatunk végre.

3. Az (*A'B'C'*)=3, mert a párhuzamos vetítés osztóviszonytartó geometriai transzformáció.

4. a) (*A'B'C'*)=7. b) Az osztóviszony centrális vetítés esetén megváltozik! Tehát az (*A'B'C'*) ismeretlen!

5. A feladat megoldásai: a) (8,4,12)=1 g) (8,4,6)=1 b) (8,4,1)= $\frac{1}{2}$ h) (8,4,7)= $\frac{1}{2}$ c) (8,4,2)=0 i) (8,4,8)=0 d) (8,4,3)=-1 j) (8,4,9)=-1 e) (8,4,4)=∞ k (8,4,10)=∞ f) (8,4,5)=2 l (8,4,11)=2. Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az a)-f) feladatok osztóviszonyainak számértéke páronként megegyezik a g)-l) feladatok eredményeivel. Ez csupán látszat ellentmondás, mert – pl. az a) és g) feladatoknál a 12-es illetve 6-os mutatóállás (mint óramutató) különbözik, de mint sugársor elem, ugyanazt az egyenest jelenti!

6. $(ABCP_1)=\frac{102}{7}$ $(ABCP_7)=-24$ $(ABCP_{13})=\frac{6}{12}$ $(ABCP_2)=16$ $(ABCP_8)=-14$ $(ABCP_{15})=\frac{18}{13}$ $(ABCP_3)=21$ $(ABCP_9)=-9$ $(ABCP_{16})=\frac{12}{7}$ $(ABCP_4)=26$ $(ABCP_{10})=-6$ $(ABCP_\infty)=6$ $(ABCP_5)=66$ $(ABCP_{11})=-\frac{18}{7}$ $(ABCP_6)=-54$ $(ABCP_{12})=-\frac{3}{2}$.

7. A feladat alapszerkesztés, melyet a jegyzetben található szerkesztési leírás alapján hajthatunk végre.

8. a) (*A'B'C'D'*)=2, de itt a megfelelő szakaszok is egyenlők (*A'C'*=*AC*, *C'B'*=*CB*, *A'D'*=*AD* és *D'B'*=*DB*). b) (*A'B'C'D'*)=2, de itt (*A'B'C'*)=(*ABC*) és (*A'B'D'*)=(*ABD*) is fennáll.

9. a) (*A'B'C'D'*)=5, de itt (*A'B'C'*)=(*ABC*) és (*A'B'D'*)=(*ABD*) is fennáll. b) (*A'B'C'D'*)=5.

10. A feladat megoldásai: a) (8,4,5,1)=4 e) (8,4,5,5)=1 i) (8,4,5,9)=-2 b) (8,4,5,2)=∞ f) (8,4,5,6)=2 j) (8,4,5,10)=0 c) (8,4,5,3)=-2 g) (8,4,5,7)=4 k) (8,4,5,11)=1 d) (8,4,5,4)=0 h)(8,4,5,8)=∞ l) (8,4,5,12)=2. Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az a)-f) feladatok kettősviszonyainak számértéke páronként megegyezik a g)-l) feladatok eredményeivel. Ez csupán látszat ellentmondás, mert – pl. az a) és g) feladatoknál az 1-es illetve 7-es mutatóállás (mint óramutató) különbözik, de mint sugársor elem, ugyanazt az egyenest jelenti!

11. Megoldások: a) (*BADC*)=k j) (*CADB*)=1-k b) (*CDAB*)=k k) (*DBCA*)=1-k c) (*DACB*)= $\frac{k-1}{k}$ l) (*ADCB*)= $\frac{k}{k-1}$ d) (*DCBA*)=k m) (*BCDA*)= $\frac{k}{k-1}$ e) (*CBDA*)= $\frac{k}{k-1}$ n) (*CDBA*)= $\frac{1}{k}$ f) (*ACBD*)=1-k o) (*DABC*)= $\frac{k}{k-1}$ g) (*ADBC*)= $\frac{k-1}{k}$ p) (*DBAC*)=k h) (*BDAC*)=1-k r) (*ACDB*)= $\frac{1}{1-k}$ i) (*BCAD*)= $\frac{k-1}{k}$ s) (*CBAD*)= $\frac{k}{k-1}$.

12. Csak olyan pontnégyesekre értelmeztük a kettősviszonyt, amelyek egy pontsor pontjai (azaz egy egyenesre esnek). Ez a feltétel az a); b); c) részek egyikében sem teljesül, tehát nem értelmezhető a kettősviszony, a feladatban szereplő pontnégyesekre.

13. (*ABCD*)=-4, mert (*e*) és |*P*| perspektív helyzetű, és ezért teljesül a Papposz tétele.

14. (*abcd*)=2, mert [*t*] és |*P*| perspektív helyzetű, és ezért teljesül a Papposz tétele.

15. (*ABCD*)=-5, mert [*t*] és (*e*) perspektív helyzetű, és ezért teljesül a Papposz tétele.

3.3. 3.3.3 Elsőfajú alapalakzatok projektív vonatkozása (Megoldások)

1. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

2. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

3. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

4. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

5. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

6. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

7. A feladat a) része alapszerkesztés. A feladat b) része: A papírszalagos eljárást (lásd jegyzet) projektív sugársorokkal kapcsolatban alkalmaztuk. Projektív pontsorok esetén akkor használhatjuk, ha előbb

felveszünk tetszőlegesen egy-egy sugársort úgy, hogy azok perspektív helyzetűek legyenek a feladatban szereplő egy-egy pontsorral.

8. A feladat a) része: alapszerkesztés (lásd jegyzet). A feladat b) része: A 7. feladat b) részével azonos eljárás.

9. A feladat a) része: alapszerkesztés (lásd jegyzet). A feladat b) része: A 7. feladat b) részével azonos eljárás.

10. A feladat a); b); c) része: alapszerkesztés (lásd jegyzet). A feladat d) része: A 7. feladat b) részével azonos eljárás.

11. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

12. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

13. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

14. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

15. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

16. Alapszerkesztés, lásd jegyzet.

17. A feladat a) része: A pontsorok projektivitása akkor áll fenn, ha tudjuk bizonyítani, hogy $(A_1B_1C_1D_1)=(A_2B_2C_2D_2)$. Az egyes pontok egybeesései miatt $(A_1B_1C_1D_1)=(C_2D_2A_2B_2)$. A kettősviszonyra vonatkozó tulajdonságokat (lásd jegyzet) alkalmazva: $(C_2D_2A_2B_2)=(B_2A_2D_2C_2)=(A_2B_2C_2D_2)$. A feladat b) részének megoldása során az előbbihez hasonlóan kell eljárni.

18. Lásd a Geometria I jegyzet 84. oldal 50. ábráit.

19. A térkép és a légifelvétel között projektív vonatkozás áll fenn. Feladat a negyedik megfelelő pontpár szerkesztése.

3.4. 3.3.4 Másodfajú alapalakzatok (Megoldások)

1. A feladatot az alapszerkesztések bármelyikével el lehet végezni, tehát: Perspektív centrum felhasználásával, Perspektív főcentrum felhasználásával, Perspektív helyzetbe hozással, Papírszalagos eljárással. Megjegyzés: A feladat számítással is megoldható, így a kapott eredmény alapján a keresett képpontok kijelölhetők. Ez természetesen nem szerkesztés.

2. Alapszerkesztés. (Lásd pl. a papírcsíkos eljárást.)

3. Alapszerkesztés.

4. Alapszerkesztés.

5. A légi fénykép és a térkép két kollineár vonatkozású síkrendszer, tehát a keresett pont az alapszerkesztések egyikével megszerkeszthető.

6. A két légi fénykép (F_1 és F_2) kollineár vonatkozású síkrendszert alkot, tehát a keresett pont az alapszerkesztések egyikével megszerkeszthető.

7. Alapszerkesztés.

8. Alapfeladat.

9. Alapfeladat.

10. Alapfeladat.

11. Alapszerkesztés.

3.5. 3.3.5 Axiális (tengelyes) affinitás (Megoldások)

1. Alapszerkesztés a négyzet csúcsaira alkalmazva, az illeszkedéstartás és azon tulajdonság felhasználásával, hogy egyenes és képe a tengelyen metszik egymást.

2. Alapszerkesztés. (Lásd az előző feladatot.)

3. A szerkesztés menete: a) A paralelogramma átlóit hosszabítsuk meg a tengelyig. b) A tengelyen lévő metszéspontok szakaszára Thalesz kört emelünk. c) A paralelogramma átlóinak metszéspontjából húzzunk párhuzamost az adott affinitás irányával. d) Az előbbi egyenes a Thalesz körből kimetszi a rombusz átlóinak metszéspontját. Ezzel megfelelő pontpárhoz jutottunk (meghatároztuk az axiális affinitást), a szerkesztés innen már illeszkedéssel végrehajtható.

4. Mivel a téglalapnak nem az átlói (mint az előbbi feladatban), hanem a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, ezért itt a paralelogramma két szomszédos oldalának egyenesét kell a tengelyig meghosszabbítani. A b), c), d) szerkesztési lépések azonosak az előbbivel.

5. A pont képének szerkesztését alkalmazzuk az egyenes két pontjára, melyek közül egyik a tengellyel való metszéspont legyen, hiszen ennek képe önmaga.

6. A megfelelő egyenesek tengelypontjait egy olyan kör metszi ki az adott tengelyből, amelynek a középpontja illeszkedik a tengelyre. Ezen kör (Thalesz kör) középpontját a *PP'* szakaszt merőlegesen felező egyenese metszi ki az affinitás tengelyéből.

7. Legyen *A'B'=A'C'*, ekkor a *B'C'* oldal az egyenlőszárú háromszög alapja. Legyen *F* az *ABC* háromszög *BC* oldalának felezőpontja. Az affinitást meghatározó *F'* pontot az affinitás irányával párhuzamos, az *F* pontra illeszkedő egyenes metszi ki az *A'B'* szakaszra emelt Thalesz körből. Az *A'B'=B'C'* eset a feladat másik megoldását adja.

8. Az *A'* pontot az *AB* és *AC* egyenesek tengelypontjai által meghatározott szakaszra emelt Thalesz körből metszi ki az *A* csúcsra illeszkedő, tengelyre merőleges egyenes.

9. Alapszerkesztés. (Az illeszkedés megtartásával.)

10. Legyen a paralelogramma átlóinak metszéspontja *M*. Az *M* pont *M'* megfelelőjét két Thalesz kör metszéspontjaként nyerjük. Az egyik kör átmérővégpontjait a paralelogramma átlóinak tengelypontjai adják, a másik kör átmérővégpontjait pedig paralelogramma középvonalainak tengelypontjai adják.

11. A szerkesztésben felhasználjuk a következő tételt: Minden ellipszis ortogonális axiális affin képe a nagytengelye – mint átmérő – köré rajzolt körnek. Ennek az affinitásnak a tengelye a nagytengely egyenese. A kistengely egyik végpontjának a „kör rendszerében" lévő megfelelőjét (képét) a kistengely egyenesének a körrel való metszéspontjában nyerjük.

12. Előbb megszerkesztjük az egyenesnek a kör rendszerében lévő képét, majd meghatározzuk ennek a körrel vett metszéspontjait, végül e pontoknak megszerkesztjük az ellipszis rendszerében lévő megfelelőit.

13. A szerkesztés menete: a) Meghatározzuk a *P* pontnak a („körrendszerbeli") *P'* megfelelőjét. b) Megszerkesztjük a körnek a *P'* pontra illeszkedő érintőit. c) Az előbb nyert érintőknek megadjuk az affin képét, amelyek a keresett ellipszis érintők lesznek.

14. A szerkesztés menete: a) Az ellipszissel kapcsolatos problémát áttranszformáljuk a kör rendszerébe. b) A kör rendszerében elvégezzük a szerkesztést. c) Az eredményt visszatranszformáljuk az ellipszis rendszerébe.

15. A megoldás menete megegyezik az előző feladat megoldási tervével.

16. A szerkesztés menete: a) Az ellipszissel kapcsolatos problémát áttranszformáljuk a kör rendszerébe. b) A kör rendszerében elvégezzük a szerkesztést. c) Az eredményt visszatranszformáljuk az ellipszis rendszerébe.

17. Előbb az *E* ismeretlen érintési pont *E'* („körrendszerbeli") képét határozzuk meg. Mivel a kör érintője merőleges az érintési pontban a kör sugarára, ezért *E'* rajta van az érintő tengelypontja és az ellipszis középpontja által meghatározott szakasz Thalesz körén. Az *E'* tehát az előbbi Thalesz körnek és a nagytengelyre emelt körnek a metszéspontjában lesz. A keresett *E* érintési pontot az *E'* merőleges

vetületeként nyerjük az adott érintőn. Ezzel az adott *E* és *E'* megfelelő pontpárral meghatároztuk az affinitást, így a kistengely végpontjai már rekonstruálhatók.

18. A *P* pont körrendszerbeli képét (*P'* pontot) az adott nagytengelyre emelt körön – merőleges affinitásról lévén szó – közvetlenül kijelölhetjük. Ezzel megfelelő pontpárhoz jutottunk, azaz meghatároztuk az affinitást. Innentől a szerkesztés már egyszerűen befejezhető.

19. Az adott *E* pont körrendszerbeli *E'* képe rajta van azon a Thalesz körön, amelyik átmérőjének egyik végpontját az adott érintő tengelypontja, másik végpontját pedig az ellipszis középpontja (itt az adott tengelyek egyeneseinek *O* metszéspontja) adja. Továbbá az *E'* illeszkedik arra az egyenesre is, amelyik átmegy az *E* ponton és merőleges a nagytengely egyenesére (a merőleges affinitás miatt). Ezek alapján *E'* szerkeszthető. A nagytengely végpontjait az *OE'* sugarú kör a nagytengely egyeneséből metszi ki. A kistengely végpontjait affinitással nyerjük.

20. Jelöljük az *AB* szakasz felezési pontját *F*-fel. Az *F* pont körrendszerbeli *F'* képe rajta van az adott pontok egyenesének tengelypontja és az ellipszis középpontja által meghatározott szakasz Thalesz körén, mert a kör bármely húrjának felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Továbbá az *F'* illeszkedik arra az egyenesre is, amelyik átmegy az *F* ponton és merőleges a nagytengely egyenesére (a merőleges affinitás miatt). Innen *F'* szerkeszthető, és ennek ismeretében, a tengelypontot ezzel összekötve az *AB* egyenes körrendszerbeli képét kapjuk, majd ezen az *A'* és *B'* pontokat kijelölhetjük. A nagytengely végpontjait az *OA'* sugarú kör metszi ki a nagytengely egyeneséből. A kistengely végpontjait affinitással nyerjük.

3.6. 3.3.6 Centrális kollineáció (Megoldások)

1. Alapszerkesztés.

2. Alapszerkesztés.

3. Ha egy centrális kollineációt felhasználó feladatban a megfelelő pontpár helyett ellentengely van megadva, akkor előbb megfelelő pontpárt keresünk. Mivel az ellentengely egy végtelen távoli egyenes megfelelője (képe), ezért bármely pontjának képét úgy nyerjük, hogy vesszük az említett pontot a centrummal összekötő egyenesnek a végtelen távoli pontját.

4. Lásd az előző feladat megoldását.

5. Lásd a 3. feladat megoldását.

6. Lásd a 3. feladat megoldását.

7. Az *M'* lényegében a két adott párhuzamos egyenes közös végtelen távoli pontjának a képe. Ezért erre illeszkedve, a *t* tengellyel párhuzamosan megadhatnánk a *q'* ellentengelyt.

8. A *C* centrumból a párhuzamosok közös M_∞ végtelen távoli pontját a *q'* ellentengelyre vetítve kapjuk annak *M'* képét. Az *M'* pontot az adott egyenesek tengelypontjaival összekötve kapjuk a keresett *a'* és *b'* képeket.

9. Az a) rész megoldása: Az adott egyenesek az *r* ellentengelyt az *A* illetve *B* pontokban metszik (mivel az ellentengellyel azonos síkrendszerben vannak). Ezen *A* illetve *B* pontoknak a (jelzett) másik síkrendszerben lévő képeik a végtelenben vannak. Az A'_∞ és B'_∞ pontokat a *CA* illetve *CB* egyenesek végtelen távoli pontjával adjuk meg. Megoldások: *a'* (Az *a* egyenes tengelypontjából párhuzamost húzunk a *CA* iránnyal.) *b'* (A *b* egyenes tengelypontjából párhuzamost húzunk a *CB* iránnyal.) A b) rész megoldása: Az *a'* és *b'* egyenesek *M'* metszéspontján át, a *t* tengellyel párhuzamosan felvehető a *q'* ellentengely.

10. Lásd az előző feladat b) részének megoldását.

11. Az *r* ellentengely a „vesszős" síkrendszer végtelen távoli pontjainak (amelyek egy végtelen távoli egyenesen helyezkednek el) a képe. Ezt figyelembe véve a megoldás lépései a következők: a) Felveszünk egy végtelen távoli pontot a „vesszős" rendszerben (P'_∞) b) Megszerkesztjük ennek a másik rendszerben lévő képét (*P*) c) A *P* ponton át a *t* tengellyel párhuzamosan felvesszük a keresett *r* ellentengelyt.

12. Lásd az előző feladat megoldását.

13. Lásd a 11. feladat megoldását.

14. A feladat megoldása lényegében megegyezik a 9. feladat a) részével. A két feladatban az a közös, hogy a két párhuzamos egyenes az ellentengellyel azonos síkrendszerben van.

15. A feladat megoldása lényegében megegyezik a 8. feladat megoldásával. A két feladatban az a közös, hogy a két párhuzamos egyenes az ellentengellyel nincs azonos síkrendszerben.

16. Az *e* egyenest egyetlen tetszőleges pontjával transzformálhatjuk (a tengelypont a végtelenben van, azaz *e’* párhuzamos *t* tengellyel.

17. Lásd az előző feladat megoldását.

18. A megoldás lépései: a) Transzformáljuk az egyik csúcsot (pl. *A*-t). b) Felvesszük az *AB* és *AC* egyenesek képét (az *A’* pontot összekötjük a az említett egyenesek tengelypontjával). c) Az előbb nyert kép-egyenesekre a *C* centrumból (úgynevezett centrális rendezőkkel) rávetítjük a hiányzó *B’* illetve *C’* képeket.

19. A szerkesztés elve azonos az előbbi feladat megoldásával, a lépéseket itt a paralelogramma csúcsaira hajtjuk végre.

20. A szerkesztés elve azonos a 18. feladat megoldásával.

21. Az a) és a b) részben is csupán egy-egy pont transzformációjáról van szó.

22. A szerkesztés menete: a) Az adott egyenesek tengelypontjai által meghatározott szakaszra Thalesz kört emelünk. Ezen a körön tetszőlegesen kijelölhető (végtelen sok megoldás!) az *a’* és *b’* egyenesek *M’* metszéspontja. b) Meghatározzuk az adott *a* és *b* egyeneseknek az ellentengellyel alkotott *A* és *B* metszéspontjait, majd az *AB* szakaszra Thalesz kört emelünk. c) Ez utóbbi Thalesz körből az *MM’* centrális rendező kimetszi a keresett *C* centrumot.

23. A szerkesztés menete: a) Az adott *a’* és *b’* egyenesek tengelypontjai által meghatározott szakaszra α szögű látókört emelünk. (Megjegyzés: Tudjuk, hogy azon pontok mértani helye a síkon, ahonnan egy szakasz végpontjai adott szögben láthatók, körívet (2 db egybevágó, a szakasz egyenesére tengelyesen szimmetrikusan elhelyezkedő) alkotnak. Ezt látókörívnek nevezzük.) Ezen a köríven tetszőlegesen kijelölhető az *a* és *b* egyenesek *M* metszéspontja. b) Meghatározzuk az adott *a’*, *b’* egyenesek *q’* ellentengellyel alkotott *A’*, *B’* metszéspontjait, majd az *A’B’* szakaszra α szögű látókört emelünk. c) Ez utóbbi látókörből az *MM’* centrális rendező kimetszi a keresett *C* centrumot.

24. A szerkesztés menete: a) Az adott *ABCD* négyszög szemben lévő oldalainak metszéspontjait összekötve kapjuk az *r* ellentengelyt. (Megjegyzés: A keresett *A’B’C’D’* négyszög téglalap, ennek a szemközti oldalai párhuzamosak, ezért közös végtelen távoli pontjaik képét, az *ABCD* négyszög szemben lévő oldalainak metszéspontjaként nyerjük.) b) Megrajzoljuk a *t* tengelyt amely átmegy a *T* ponton, és párhuzamos az előbb nyert ellentengellyel. c) Megszerkesztjük a *D’* pontot, amely rajta van a *DA* és *DC* egyenesek tengelypontjai által meghatározott szakasz Thalesz körén (mivel a téglalap szögei derékszögek), másrészt a *DA* egyenes képén, amelyet tengelypontja és *A’* pontja ismeretében megadhatunk. d) Végül a *DD’*, *AA’* centrális rendezők metszéspontjában megkapjuk a kollineáció *C* centrumát.

25. A szerkesztés menetének a), b) és d) lépései azonosak az előbbi feladat megoldási lépéseivel. A c) pontban nem egy csúcsnak, hanem az átlók *M* metszéspontjának *M’* képét kell megszerkeszteni, mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást.

26. A szerkesztés menetének elve az a) és b) szerkesztési lépések esetében, megegyezik a 24. feladat a) és b) szerkesztési lépéseivel. c) Az *ABCD* négyszög átlói *M* metszéspontjának *M’* képét két Thalesz kör metszéspontjában nyerjük. Az egyik Thalesz kör az átlók tengelypontjai által meghatározott szakasz Thalesz köre (mivel négyzet lesz a négyszög képe, és a négyzet átlói átlói merőlegesek egymásra). A másik Thalesz kör pedig a középvonalak tengelypontjai által meghatározott szakasz Thalesz köre (mert a négyzet középvonalai is merőlegesek egymásra). A négyzet középvonalainak képét az *ABCD* általános négyszögben úgy nyerjük, hogy az *M* metszéspontot összekötjük a szemben lévő oldalegyenesek metszéspontjával (mert a négyzet szemben lévő oldalai a köztük lévő középvonallal párhuzamosak, ezért egyeneseiknek közös a végtelen távoli pontjuk). d) Megszerkesztjük az *A* csúcs képét az *A’* pontot. Az *A’* pontot az *AD* és *AB* egyenesek tengelypontjai által meghatározott szakasz Thalesz köréből az *AM* egyenes képe metszi ki, amely pedig a tengelypontja és *M’* ismeretében megrajzolható. e) Végül az *MM’* és *AA’* centrális rendezők metszéspontjában megkapjuk a kollineáció *C* centrumát.

27. Mivel a kollineáció C centruma adott, ezért a két háromszög megfelelő csúcsait összekötő egyeneseknek a centrumon kell átmenniük. Desargues tétele miatt a megfelelő oldalak egyeneseinek metszéspontjai egy egyenesre kell, hogy essenek. Ezért elegendő két-két megfelelő egyenes metszéspontját meghatározni. Ezek összekötő egyenese lesz a kollineáció tengelye.

Irodalomjegyzék

Baboss Csaba: *Geometria I.,* Nyugat-Magyarországi Egyetem Geoinformatikai kar, Székesfehérvár, 2007.

Coxeter H. S. M.: *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Kárteszi Ferenc: *Bevezetés a véges geometriákba,* Akadémia Kiadó, Budapest, 1972.

Kárteszi Ferenc: *Lineáris transzformációk,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

Reiman István: *A geometria és határterületei, Gondolat Könyvkiadó,* 1986.

Pelle Béla: *Geometria,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

Szász Gábor: *Projektív geometria,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

Szőkefalvi Nagy Gyula: *A geometriai szerkesztések elmélete,* Akadémia Kiadó, Budapest, 1968.