

# **Matematikai geodéziai számítások 11.**

## **Geoidkép meghatározása csillagászati szintezéssel**

**Dr. Bácsatyai, László**

---

# Matematikai geodéziai számítások 11.: Geoidkép meghatározása csillagászati szintezéssel

Dr. Bácsatyai, László

Lektor: Dr. Benedek, Judit

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Szerzői jog © 2010 Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

## Kivonat

Fokhálózati sarokpontokban, adott felbontással ismertek a  $x$  - és  $y$  - függővonal-elhajlás-értékek. Feladat a sarokpontok által definiált téglalapon belül szerkesztendő  $5*5$ -ös rács pontjaira a függővonal-elhajlás értékek lineáris interpolálása, a rácspontokban a geoidunduláció-értékek meghatározása és geoidunduláció térkép (geoidkép) szerkesztése.

Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi. Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.

---

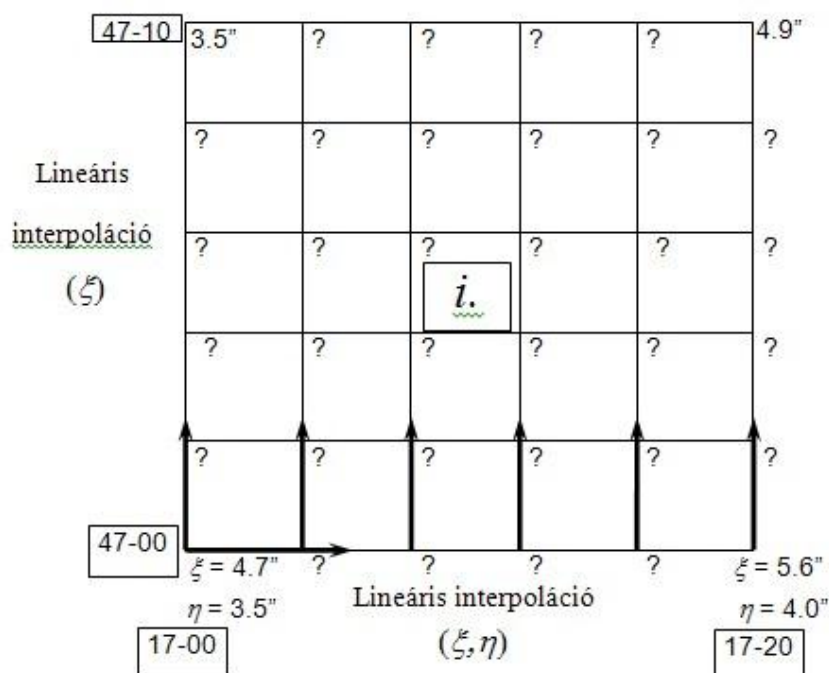
# Tartalom

11. Geoidkép meghatározása csillagászati szintezéssel .....	1
1. 11.1 A feladat megfogalmazása .....	1
2. 11.2 A csillagászati szintezés .....	2
3. 10.3 Számpélda .....	5



# 11. fejezet - Geoidkép meghatározása csillagászati szintézissel

## 1. 11.1 A feladat megfogalmazása



Fokhálózati sarokpontokban, az ábrán látható módon  $\phi$  irányban  $10'$ ,  $\lambda$  irányban  $20'$  kiterjedéssel adottak a meridián irányú – és a harántirányú – függővonal-elhajlás - értékek. Feladat a sarokpontok által definiált  $i$ . sorszámú  $10' \times 20'$  téglalapon belül szerkesztendő  $5 \times 5$ -ös rács pontjaira a függővonal-elhajlás értékek lineáris interpolálása, a rácspontokban a geoidunduláció-értékek meghatározása és – a rácsponok Egységes Országos Vetületbe történő átszámítása után - geoidunduláció térkép (geoidkép) szerkesztése.

Megjegyzés: a feladat fiktív, nem a valóságból vett függővonal-elhajlás értékeket tartalmaz.

Meghatározandók:

- az  $5 \times 5$ -ös rácsban interpolált – meridián irányú függővonal-elhajlások,
- az alsó vonalra interpolált – haránt irányú függővonal-elhajlások,
- geoidunduláció értékek az  $5 \times 5$ -ös rácsháló minden pontjában,
- a rácsponok EOV-koordinátái,
- az azonos geoidunduláció értékű izovonalak ábrája, a geoidunduláció-térkép (geoidkép)

Az – haránt irányú függővonal-elhajlások interpolációját csak az alsó rácsvonalra kell elvégezni.

**Leadandók különálló borítólapba foglalva:**

- a feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- a számítások bemutatása táblázatos formában,
- a méretarány-helyes  $5 \times 5$ -ös EOV-rácsháló a rácsponokhoz írt – és – értékekkel,

- a méretarány-helyes 5\*5-ös EOVRácsháló a rácsponthoz írt geoidunduláció értékekkel,
- a méretarány-helyes 5\*5-ös EOVRácshálóban szerkesztett geoidunduláció-térkép,
- műszaki leírás

A feladatot, a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott és rajzolt, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

## 2. 11.2 A csillagászati szintezés

A csillagászati szintezés: geoidundulációk meghatározása geometriai eszközökkel.

A geoidunduláció (a valódi és a normál nehézségi erőter azonos potenciálértékű ( $W(P')=U(P_0)=W_0$ ) szintfelületeinek távolsága) az

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_{P_0}}$$

Bruns-féle képlettel fejezhető ki.

$T_P = W_0 - U_0$  - a potenciálzavar értéke a földfelszíni P pont P' geoidi megfelelőjében,

$\gamma_{P_0}$  - a normál nehézségi erő értéke a P<sub>0</sub> pontban, az ellipszoid felületén.

A képlet fizikai értelme: a potenciálzavar – a potenciálhoz hasonlóan – munkajellegű mennyiség, a munka = erő \* út, így munka / (nehézségi) erő = út (távolság).

A továbbiakban a geoid meghatározásának geometriai módszerét vázoljuk, mely eljárásban mind a geoidot, mind a vonatkozási ellipszoidot geometriai felületként kezeljük.

Mivel a potenciálzavart nem ismerjük, a geoidunduláció fenti képletét át kell alakítani. Az egyszerűsítés miatt a továbbiakban a P indexet elhagyjuk. A Bruns-féle képletnek a geoid felületén lévő P' pontból kiinduló

tetszőleges  $\alpha$  azimutú s íve mentén vett  $\frac{dN}{ds}$  első deriváltja megadja a geoidunduláció változását az s ív mentén. E derivált értéke a függővonal-elhajlás s irányú összetevője:

$$\frac{dN}{ds} = \vartheta$$

A – meridián- és – haránt-irányú összetevőkre:

$$\frac{dN}{d\varphi} = \xi \quad \text{és} \quad \frac{dN}{d\lambda} = \eta$$

A fenti összefüggések integrálásával általános esetben

$$N_{(s)} = \int \vartheta \cdot ds$$

a meridián- és a haránt-irányú összetevők esetén:

$$N_{(\varphi)} = \int \xi \cdot d\varphi \quad \text{és} \quad N_{(\lambda)} = \int \eta \cdot d\lambda$$

---

\* Itt a Pizetti-féle függővonal-elhajlás. A zárójelbe tett indexek ugyanazon geoid-unduláció számítási módjára utalnak.

A geoidmeghatározáshoz elvileg olyan sűrűségben kellene a  $\vartheta$  és  $\vartheta'$  értékek, hogy a szomszédos pontok közötti változásuk már lineárisnak legyen tekinthető. Ez azt jelenti, hogy a terepviszonyoktól függően néhány km-enként (2-25 km) kellene ismerni a  $\vartheta$  és  $\vartheta'$  értékeket. Ha ilyen sűrűségben ismerjük a függővonal-elhajlások értékeit a geoid valamilyen azimutú metszete (szelvénye) mentén, úgy az integrálokat a  $\Sigma$  jellel, azaz algebrai összegzéssel helyettesíthetjük (numerikus integrálás). Valamilyen adott  $N_0$  geoidundulációjú pontból kiindulva, az  $i$ -ik geoidundulációt a kezdő ponthoz képest az

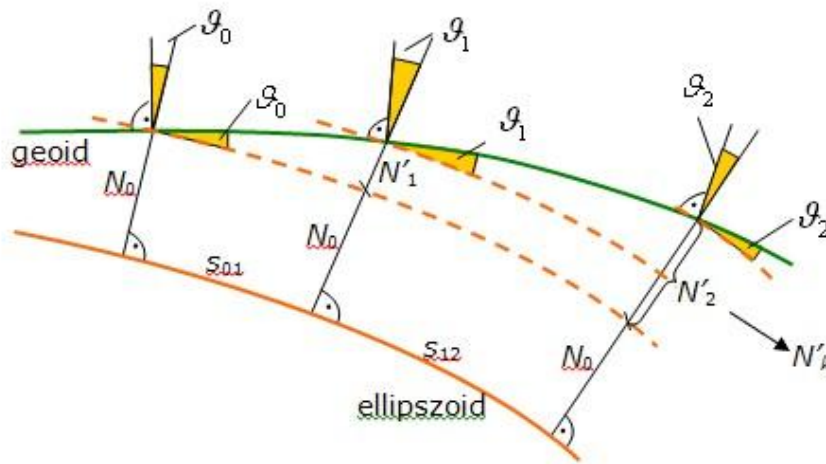
$$N'_i = \sum_1^k \vartheta_{i-1} \cdot s_{i-1,i}$$

összefüggésből számíthatjuk.

A végrehajtás lényegét az alábbi ábrán követhetjük nyomon.

Az ismert függővonal-elhajlású pontok olyan közel helyezkednek el egymáshoz, hogy a geoid, ill. az ellipszoid közöttük lévő ívei egyeneseknek, az  $N'_i$  (az ábrán csak az  $N'_1$  és  $N'_2$  láthatók) szemközti befogójú, a befogóval szemben lévő  $\vartheta$  igen kis hegyesszögű háromszögek derékszögűeknek tekinthetők. A kis szögek miatt

$$N'_1 = \vartheta_0 \cdot s_{0,1}, \quad N'_2 = \vartheta_0 \cdot s_{0,1} + \vartheta_1 \cdot s_{1,2}, \quad \dots, \quad N'_k = \vartheta_0 \cdot s_{0,1} + \vartheta_1 \cdot s_{1,2} + \dots + \vartheta_{k-1} \cdot s_{k-1,k}$$



Mivel a függővonal-elhajlás gyorsan változik, célszerű a  $\vartheta_{i-1}$  mennyiségek helyett a fenti képletekbe a

$$\vartheta_{i-1,i} = \frac{1}{2} \cdot (\vartheta_{i-1} + \vartheta_i)$$

középértékeket helyettesíteni.

A kezdő pont ismert  $N_0$  értékét az  $N'_i$  értékekhez még hozzá kell adnunk:

$$N_i = N'_i + N_0$$

Az  $N_0$  értékét általában önkényesen választják meg, pl. egy hálózati kezdőpontban 0-nak. Ezért egy geoidunduláció-térkép mindig relatív, s természetesen függ a vonatkoztatási ellipszoidunktól. Mivel a függővonal elhajlások meghatározása gyakorlatilag csak a szárazföldeken végezhető el, ezért a csillagászati szintezés módszerével a geoidnak csak helyi felületdarabjai határozhatók meg.

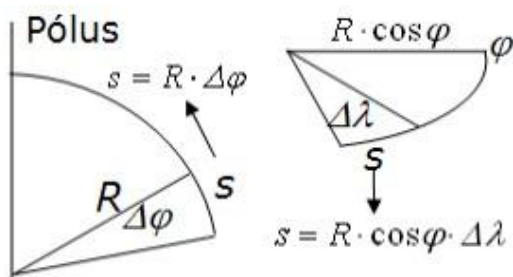
A csillagászati szintezés fontos követelménye, hogy a tervezett szelvények mentén a képletek alkalmazhatóságához elegendő számú pontban ismerjük a függővonal-elhajlásokat. Mivel a mind a szintfelületi,

mind az ellipszoidi koordinátákkal rendelkező csillagászati pontok (az ún. Laplace-pontok) egymástól való távolsága nagy, azokat megfelelő módszerrel sűríteni kell<sup>1</sup>.

A szelvényeket rendszerint észak-dél (meridián-), vagy kelet-nyugat (haránt-) irányban jelölik ki. A meridián és a haránt irányú függővonal-elhajlások a földrajzi koordináták függvényében (nagy görög betűk: szintfelületi koordináták, kis görög betűk: ellipszoidi koordináták)

$$\xi = \Phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi$$



Az  $s$  ívhosszakat ilyenkor – mint az ábrán látható - a szelvény menti szomszédos pontok szélesség-, ill. hosszúságkülönbségeinek és a földgömb sugarának, vagy a szélességi kör sugarának szorzataiként célszerű kifejezni.

A számítások munkaképletei:

$$N'_{(\varphi)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\xi_i + \xi_{i+1}) \cdot \Delta\varphi,$$

$$N'_{(\lambda)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\eta_i + \eta_{i+1}) \cdot \Delta\lambda \cdot \cos \varphi.$$

A képletekben:

$$\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i, \Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$$

$$c = 10^5 \cdot \frac{R}{2 \cdot \rho' \cdot \rho''} = 0,45 \text{ cm } \{R = 6378 \text{ km}; \rho' = 3437,8'; \rho'' = 206266''\}$$

A  $\xi_i$  és  $\xi_{i+1}$ , a  $\eta_i$  és  $\eta_{i+1}$  értékei  $\varphi$ -ben, a  $\Delta\varphi$  és  $\Delta\lambda$  értékei  $\varphi$ -ben értendők. E helyettesítésekkel az  $N$  értékeit cm dimenzióban kapjuk.

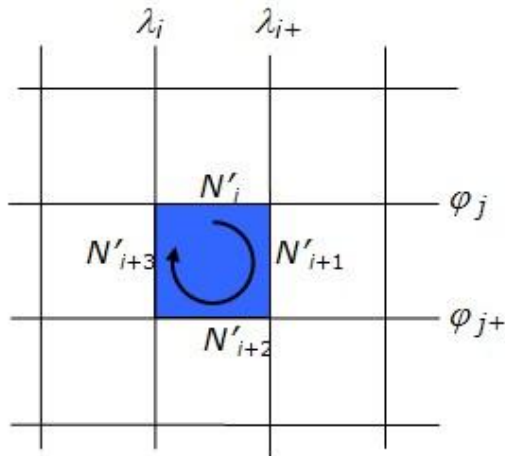
$$N = N'_{(\varphi)} + N_0; \quad N = N'_{(\lambda)} + N_0; \quad N_0 = 0 \text{ esetén } N = N'_{(\varphi)} = N'_{(\lambda)}$$

Az eddigi gyakorlat szerint csillagászati szintezéssel nagyobb területre geoidképet úgy határoznak meg, hogy először megfelelő sűrűségű hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaiban (gyakorlatilag négyzethálózat sarokpontjaiban) meghatározzák a  $\xi$  és az  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők értékét. Ezt követően a szélességi vonalak mentén az  $\eta$  összetevők-, a hosszúsági vonalak mentén pedig a  $\xi$  összetevők felhasználásával számítják a geoid metszeteket.

---

<sup>1</sup>Régebben a csillagászati-geodéziai mérések igen időigényesek voltak, ezért csak viszonylag kevés számú függővonal elhajlás adat állt rendelkezésre a geoidundulációk számításához (Magyarországon pl. mindössze 138 ilyen ún. asztrogeodéziai pont van). Azonban az új mérési technológiákat (CCD érzékelők, modern képfeldolgozó algoritmusok) alkalmazó számítógép vezérelt műszerek (pl. zenitkamerák) segítségével a mérés és az adatfeldolgozás jelentősen gyorsítható, ill. a pontosság növelhető, ami a geometriai geoidmeghatározás újjáéledését jelentheti a közeljövőben (Gerstbach, 1996a,b, Hirt and Flury, 2008, Hirt et al, 2010).





A hagyományos szintezési poligonokhoz hasonlóan, egy zárt négyzetben az egyik sarokpontból kiindulva, majd ugyanoda visszatérve, ugyanazt a geoidunduláció-értéket kellene kapnunk:

$$N'_{i+3} + N'_{i+1} + N'_{i+2} + N'_{i+4} = 0$$

Miután ez nem teljesül, a rács egészére a feltételes mérések módszere szerinti kiegyenlítést célszerű alkalmazni. A kiegyenlített geoidunduláció-értékek között az interpolálással kapott azonos, kerek értékű geoidundulációkból - a szintvonal-szerkesztéshez hasonlóan - grafikusán, vagy számítógépes szoftverrel izovonalas geoidunduláció-térképeket készítenek.

### 3. 10.3 Számpélda

Feladat ismertetése:

Az egyes téglalapok közepén lévő sorszámok szerint egy-egy 10' \* 20' téglalapon belül szerkesztendő 5\*5-ös rács pontjaira a függővonal-elhajlás értékek lineáris interpolálása, a rácspontokban a geoidunduláció-értékek meghatározása és geoidunduláció térkép (geoidkép) szerkesztése.

Adottak a sarokpontok földrajzi ( $\varphi, \lambda$ ) koordinátái az IUGG67 ellipszoidon, ahol a függővonal elhajlási értékeket meghatározták ( $\zeta, \eta$ ). A pontosabb meghatározás érdekében, a sarokpontok közötti térben több hálópontot is meghatároztunk. Ez a művelet interpolálással oldható meg.

Az interpolálás eredményei:

φ= 46-30-00	INTERPOLÁCIÓ					φ= 46-30-00
λ= 17-40-00	ξ=-2,6	-1,0	0,6	2,3	3,9	5,5
	-1,4	-0,4	0,7	1,8	2,9	3,9
	-0,2	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3
	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8
	2,1	1,5	0,9	0,4	-0,2	-0,8
φ= 46-20-00	ξ=3,3	2,2	1,0	-0,1	-1,3	-2,4
λ= 17-20-00	η=2,3	1,6	0,8	0,1	-0,7	-1,4

A megadott képleteket alkalmazva, a rácsponthoz kiszámíthatók a geoidundulációk:

$$N'_{(\varphi)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\xi_i + \xi_{i+1}) \cdot \Delta\varphi,$$

$$N'_{(\lambda)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\eta_i + \eta_{i+1}) \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi.$$

$$c = 10^5 \cdot \frac{R}{2 \cdot \rho' \cdot \rho''} = 0,45 \text{ cm } \{R = 6378 \text{ km}; \rho' = 3437,8'; \rho'' = 20626''\}$$

$$N = N'_{(\varphi)} + N_0; \quad N = N'_{(\lambda)} + N_0; \quad N_0 = 0 \text{ esetén } N = N'_{(\varphi)} = N'_{(\lambda)}$$

Eredmények:

GEOIDUNDULÁCIÓ					
3.15	10.10	15.23	18.51	19.96	19.55
6.77	11.30	14.01	14.87	13.90	11.07
8.26	11.37	12.65	12.09	9.69	5.44
7.63	10.31	11.16	10.16	7.33	2.65
4.88	8.12	9.53	9.09	6.82	2.70
0.00	4.80	7.76	8.88	8.16	5.60

Az alsó sor geoidunduláció értékei az alsó sor sarokpontjai közötti – szerinti interpoláció után az

$$N'_{(\lambda)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\eta_i + \eta_{i+1}) \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi$$

képlet szerinti számítás eredményei, a többi geoidundulációt a

$$N'_{(\varphi)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\zeta_i + \zeta_{i+1}) \cdot \Delta\varphi$$

képlet alapján, a – interpoláció eredményeként kaptuk.

Ezen értékeket egy geoidundulációs térképen kellett ábrázolni EOVS rendszerben. A földrajzi koordináták EOVS-be való átszámításához a HungaPro 3.31. programot használtuk.

Pontszám	$\varphi$	$\lambda$	Y	X	N geoidunduláció
01	46-20-00	17-20-00	518023.52 3	111319.65 7	0
02	46-20-00	17-24-00	523155.59 9	111209.19 4	4.8
03	46-20-00	17-28-00	528287.77 1	111103.12 4	7.76
04	46-20-00	17-32-00	533420.03 7	111001.41 2	8.88
05	46-20-00	17-36-00	538552.38 9	110904.10 3	8.16
06	46-20-00	17-40-00	543684.79 8	110811.16 3	5.6
07	46-22-00	17-20-00	518104.82 8	115024.12 5	4.88
08	46-22-00	17-24-00	523233.74 3	114913.73 3	8.12
09	46-22-00	17-28-00	528362.75 6	114807.73 0	9.53
10	46-22-00	17-32-00	533491.85 7	114706.08 3	9.09
11	46-22-00	17-36-00	538621.04 1	114608.83 6	6.82
12	46-22-00	17-40-00	543750.31 1	114515.95 3	2.7
13	46-24-	17-20-	518186.13	118728.58	7.63

Geoidkép meghatározása  
csillagászati szintezéssel

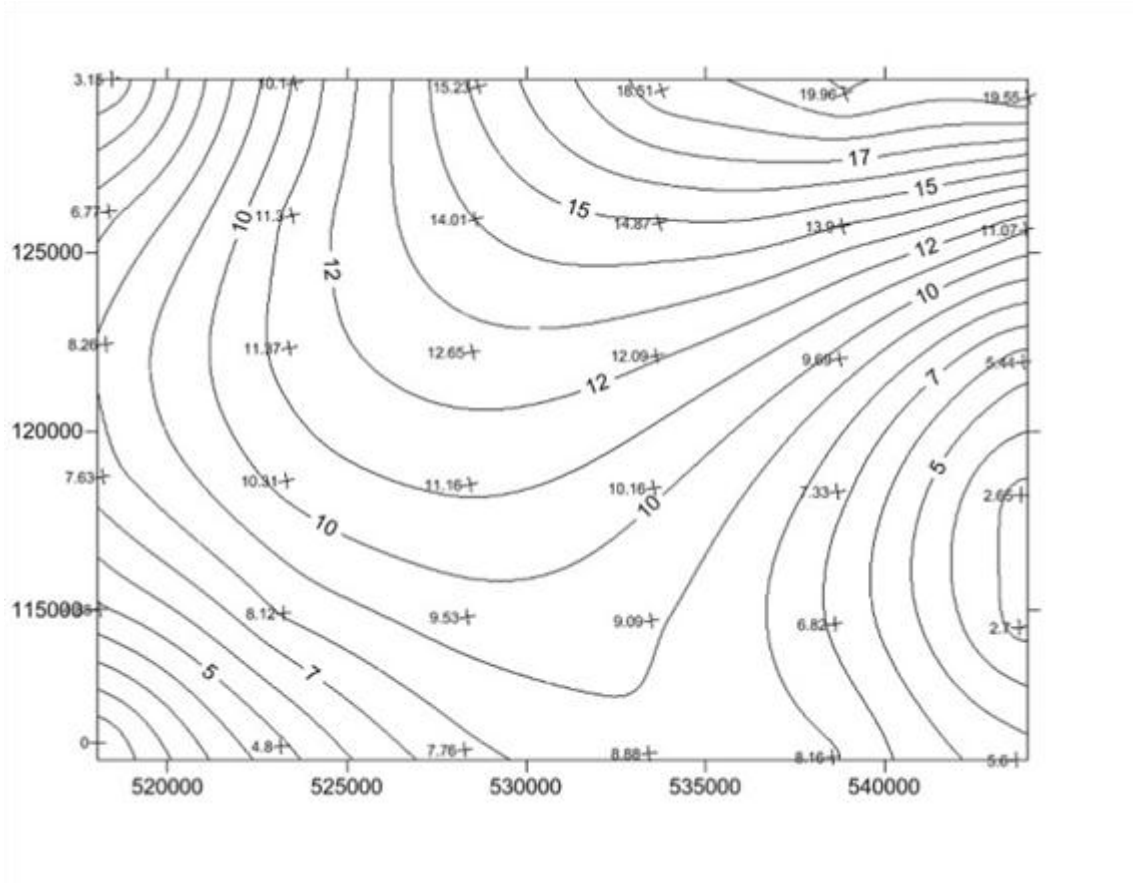
	00	00	2	6	
14	46-24-00	17-24-00	523311.890	118618.270	10.31
15	46-24-00	17-28-00	528437.739	118512.327	11.16
16	46-24-00	17-32-00	533563.677	118410.747	10.16
17	46-24-00	17-36-00	538689.705	118313.564	7.33
18	46-24-00	17-40-00	543815.822	118220.739	2.65
19	46-26-00	17-20-00	518267.430	122433.034	8.26
20	46-26-00	17-24-00	523390.032	122322.796	11.37
21	46-26-00	17-28-00	528512.719	122216.929	12.65
22	46-26-00	17-32-00	533635.502	122115.419	12.09
23	46-26-00	17-36-00	538758.369	122018.287	9.69
24	46-26-00	17-40-00	543881.326	121925.515	5.44
25	46-28-00	17-20-00	518348.731	126137.488	6.77
26	46-28-00	17-24-00	523468.173	126027.319	11.3
27	46-28-00	17-28-00	528587.705	125921.529	14.01
28	46-28-00	17-32-00	533707.326	125820.075	14.87
29	46-28-00	17-36-00	538827.026	125722.996	13.9
30	46-28-00	17-40-00	543946.826	125630.289	11.07
31	46-30-00	17-20-00	518430.030	129841.974	3.15

32	46-30-00	17-24-00	523546.316	129731.855	10.1
33	46-30-00	17-28-00	528662.690	129626.112	15.23
34	46-30-00	17-32-00	533779.143	129524.722	18.51
35	46-30-00	17-36-00	538895.695	129427.706	19.96
36	46-30-00	17-40-00	544012.329	129335.059	19.55

X[m]

Az alábbi geoidundulációs térkép AutoCAD programmal készült:

Y[m]



Végezetül, ebben a modulban köszönöm meg lektorom, Dr. Benedek Judit minden részletre kiterjedő, figyelmemet elsősorban a matematikai jellegű hiányosságokra felhívó munkáját. Kritikai észrevételeit igyekeztem a lehető legteljesebb mértékben figyelembe venni. A kiküszöbölt hiányosságok Dr. Benedek Judit érdemei, ha valami mégis bent maradt, az én hibám.

Székesfehérvár, 2011. 02. 27.

Dr. Bácsatyi László

# Irodalomjegyzék

Hirt C. Flury J. : *Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data.* Journal of Geodesy 82, 2008

C Hirt, B Bürki, A Somieski, G Seeber: *Modern Determination of Vertical Deflections Using Digital Zenith Cameras,* Journal of Surveying Engineering, 2010

G. Gerstbach : *How to get an European centimeter geoid (“astro-geological geoid”).* Physics and Chemistry of the Earth , 1996

G. Gerstbach : *The astro-geodetic use of CCD for gravity field refinement,* Physics and Chemistry of the Earth