Matematikai geodéziai számítások 8.

Szintezési hálózat kiegyenlítése

Dr. Bácsatyai, László

Matematikai geodéziai számítások 8.: Szintezési hálózat kiegyenlítése

Dr. Bácsatyai, László
Lektor: Dr. Benedek , Judit

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

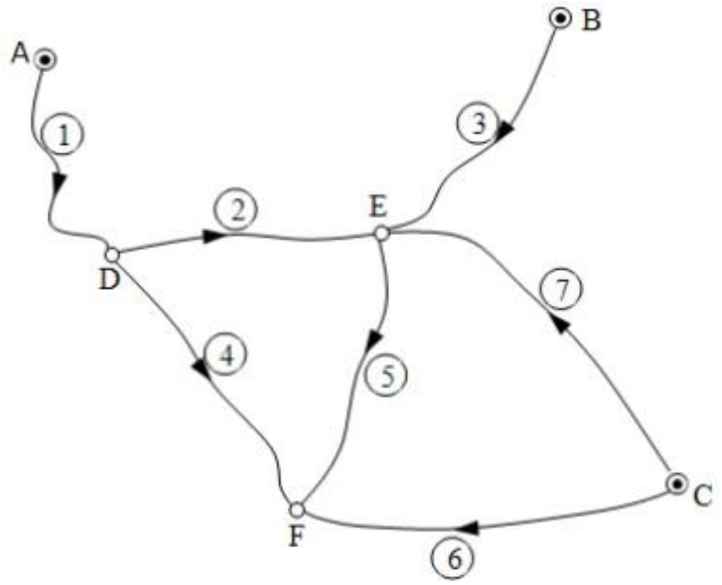
Kivonat

Ez a modul szintezési hálózat közvetett mérések szerinti kiegyenlítését, s egyidejűleg a pontossági mérőszámok meghatározását mutatja be.

Tartalom

8. fejezet - Szintezési hálózat kiegyenlítése

1. 8.1 A feladat megfogalmazása



Az ábrán látható szintezési hálózatban adottak az A, B és C pontok tengerszint feletti magasságai. Mértük az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 szintezési vonalak magasságkülönbségeit.

Meghatározandók:

- a mérési eredmények súlyait a vonalhosszak alapján,
- a D, E és F pontok koordinátáinak közelítő értékei,
- a D, E és F pontokra vonatkozó koordináta-kiegészítő értékek és a kiegyenlített magasságok,
- a súlyegység középhibája,
- a kiegyenlített magasságok középhibái,
- a mérési javítások és a kiegyenlített mérési eredmények.

A normál-egyenletrendszer megoldásához szükséges inverz mátrixot az adjungált mátrix segítségével kell meghatározni.

Dimenziók:

- cm-ben: javítási egyenletek tisztatagjai, normál-egyenletrendszer tisztatagjai, kiegyenlített ismeretlenek, mérési javítások, a súlyegység középhibája és a kiegyenlített ismeretlenek középhibái,
- m-ben: D, E és F pontok végleges magasságai és a kiegyenlített mérési eredmények.

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája a részeredményekkel együtt,
- Eredmények összefoglaló táblázata

A feladatot zsebkalkulátor segítségével kell megoldani, s a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

2. 8.2 Közvetett mérések kiegyenlítése (koordináta-kiegyenlítés): lineáris eset

m számú ismeretlen meghatározására *n* számú mérést végzünk. A kiegyenlítésnek csak az $m > n$ feltétel teljesülése esetén van értelme, $m=n$ esetén nincs fölös mérés, $m<n$ esetén a feladatot nem lehet megoldani. A fölös mérések száma $f = n - m$.

Közvetett mérési eredmények valódi értékei:

$$U_1 = a_{11} \cdot Z_1 + a_{12} \cdot Z_2 + \dots a_{1m} \cdot Z_m$$
$$U_2 = a_{21} \cdot Z_1 + a_{22} \cdot Z_2 + \dots a_{2m} \cdot Z_m$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$U_n = a_{n1} \cdot Z_1 + a_{n2} \cdot Z_2 + \dots a_{nm} \cdot Z_m$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ - a keresett ismeretlenek valódi értékei

Közvetítő egyenletek:

$$u_1 = a_{11} \cdot z_1 + a_{12} \cdot z_2 + \dots a_{1m} \cdot z_m$$
$$u_2 = a_{21} \cdot z_1 + a_{22} \cdot z_2 + \dots a_{2m} \cdot z_m$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n = a_{n1} \cdot z_1 + a_{n2} \cdot z_2 + \dots a_{nm} \cdot z_m$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ – a mérési eredmények

$z_1, z_2, \dots, z_n$ - a keresett ismeretlenek mérési eredményekhez tartozó (nem ismert) értékei

A mérési eredmények kiegyenlített értékei:

$$\bar{u}_1 = a_{11} \cdot \bar{z}_1 + a_{12} \cdot \bar{z}_2 + \dots a_{1m} \cdot \bar{z}_m$$
$$\bar{u}_2 = a_{21} \cdot \bar{z}_1 + a_{22} \cdot \bar{z}_2 + \dots a_{2m} \cdot \bar{z}_m$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\bar{u}_n = a_{n1} \cdot \bar{z}_1 + a_{n2} \cdot \bar{z}_2 + \dots a_{nm} \cdot \bar{z}_m$$

$\bar{u}_i$ - mérési eredmények kiegyenlített értékei

$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots \bar{z}_m$ - a keresett ismeretlenek kiegyenlített értékei

A fentiekben tehát U_i a mérések, Z_i a keresett ismeretlenek valódi értékei, u_i a mérési eredmények, z_i a keresett ismeretlenek mérési eredményekhez tartozó értékei, $\bar{u}_i$ a mérési eredmények, $\bar{z}_i$ a keresett ismeretlenek kiegyenlített értékei.

A mérési eredmények kiegyenlített értékei a mérési javítások és közelítő értékek bevezetésével:

$$u_1 - v_1 = a_{11} \cdot (z_{10} - \delta z_1) + a_{12} \cdot (z_{20} - \delta z_2) + \ldots + a_{1m} \cdot (z_{m0} - \delta z_m)$$

$$u_2 - v_2 = a_{21} \cdot (z_{10} - \delta z_1) + a_{22} \cdot (z_{20} - \delta z_2) + \ldots + a_{2m} \cdot (z_{m0} - \delta z_m)$$

....

$$u_n - v_n = a_{n1} \cdot (z_{10} - \delta z_1) + a_{n2} \cdot (z_{20} - \delta z_2) + \ldots + a_{nm} \cdot (z_{m0} - \delta z_m)$$

z_{10}, z_{20}, ... , z_{m0} - a keresett ismeretlenek közelítő értékei,

v_i - mérési javítások (i = 1, 2, ... , n) ,

z_j – a koordináta-kiegészítő értékek (j = 1, 2, ... , m).

Javítási egyenletrendszer:

$$v_1 = a_{11} \cdot \delta z_1 + a_{12} \cdot \delta z_2 + \ldots + a_{1m} \cdot \delta z_m + l_1$$
$$v_2 = a_{21} \cdot \delta z_1 + a_{22} \cdot \delta z_2 + \ldots + a_{2m} \cdot \delta z_m + l_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = a_{n1} \cdot \delta z_1 + a_{n2} \cdot \delta z_2 + \ldots + a_{nm} \cdot \delta z_m + l_n$$

$$l_i = u_i - a_{i1} \cdot z_{10} - a_{i2} \cdot z_{20} - \ldots - a_{im} \cdot z_{m0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Javítási egyenletrendszer mátrixos formában:

$$\underset{n,1}{\mathbf{v}} = \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\delta\mathbf{z}} + \underset{n,1}{\mathbf{l}}$$

Jelölések:

$$\underset{n,m}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nm} \end{pmatrix}; \quad \underset{n,1}{\mathbf{l}} = \mathbf{u} - \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\mathbf{z}_0} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_n \end{pmatrix};$$

$$\underset{1,n}{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}} = (u_1 \quad u_2 \ldots\ldots u_n); \quad \underset{1,n}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = (v_1 \quad v_2 \quad \ldots\ldots \quad v_n); \quad \underset{1,n}{\mathbf{l}^{\mathrm{T}}} = (l_1 \quad l_2 \quad \ldots\ldots \; l_n);$$

$$\underset{1,m}{\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}} = (\delta z_1 \quad \delta z_2 \quad \ldots\ldots \delta z_m)$$

A $^{\mathrm{T}}$ felső index transzponált mátrixot jelöl.

A normál egyenletrendszer mátrixos formában ($\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}$ = min. feltétel alapján):

$$\underset{m,n}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\delta\mathbf{z}} + \underset{m,n}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,1}{\mathbf{l}} = \underset{m,1}{\mathbf{0}}$$

Az eddigi jelöléseken túl a súlymátrix:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} & 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2} \end{pmatrix}$$

A súlymátrix a gyakorlatban – a mérésekre vonatkozó függőségi kapcsolatok ismeretének hiányában – diagonális, ami azt jelenti, hogy a méréseket függetleneknek tekintjük. **Q** – a súlymátrix inverze, a súlykoefficiens mátrix.

μ_0 – a súlyegység középhibája

μ_i – a mérési eredmények előzetes középhibái

A normál egyenletrendszer megoldása:

$$\underset{m,1}{\delta\mathbf{z}} = -\left(\underset{m,n}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,m}{\mathbf{A}}\right)^{-1} \underset{m,n}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,1}{\mathbf{l}}$$

A keresett ismeretlenek:

$$\underset{m,1}{\bar{\mathbf{z}}} = \underset{m,1}{\mathbf{z}_0} - \underset{m,1}{\delta\mathbf{z}}$$

$$\underset{m,1}{\bar{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}} = \left(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m\right); \quad \underset{m,1}{\mathbf{z}_0^{\mathrm{T}}} = \left(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0}\right); \quad \underset{1,m}{\delta\mathbf{z}^{\mathrm{T}}} = \left(\delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_m\right).$$

A súlyegység középhibája:

$$\mu_0 = \pm\sqrt{\frac{\underset{1,n}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,1}{\mathbf{v}}}{f}}$$

P – súlymátrix

$\underset{n,1}{\mathbf{v}} = \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\delta\mathbf{z}} + \underset{n,1}{\mathbf{l}}$ – mérési javítások vektora

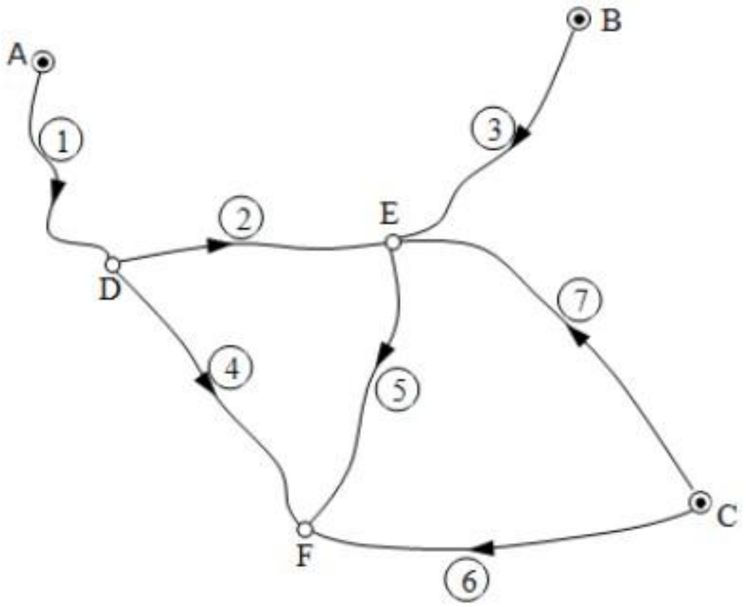
f – fölös mérések száma

Keresett ismeretlenek utólagos középhibái:

$$\mu_{\delta z_j} = \mu_0 \cdot \sqrt{\mathrm{Q}_{jj}}$$

j = 1, 2, ... , *m*, Q_{jj} a $\underset{m,m}{\mathbf{Q}_{\delta z}} = \left(\underset{m,n}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,m}{\mathbf{A}}\right)^{-1}$ mátrix *j*-ik főátlóbeli eleme.

3. 8.3 Számpélda



Kiinduló adatok:

Adott alappontok	Adott alappontok magassága, *H* (m)
A	183,506
B	192,353
C	191,880

Mérendő mennyisége k U_i	Mérési eredmények u_i, m	Szintezési vonal hossza, d_i km	Magasság-különbsége k
1	+6,135	33,0	$H_D - H_A$
2	+8,343	33,9	$- H_D + H_E$
3	+5,614	30,4	$H_E - H_B$
4	+1,394	32,7	$- H_D + H_F$
5	-6,969	31,8	$- H_E + H_F$
6	-0,930	29,9	$H_F - H_C$
7	+6,078	34,5	$H_E - H_C$

Az általános jelöléseket a feladat aktuális jelöléseivel helyettesítjük.

1. Közvetítő egyenletek:

$$u_1 = H_D - H_A$$
$$u_2 = -H_D + H_E$$
$$u_3 = H_E - H_B$$
$$u_4 = -H_D + H_F$$
$$u_5 = -H_E + H_F$$
$$u_6 = H_F - H_C$$
$$u_7 = H_E - H_C$$

1. Közelítő értékek:

$$\begin{aligned} H_{D0} &= 183{,}506\,\mathrm{m} + 6{,}135\,\mathrm{m} = 189{,}641\,\mathrm{m} \\ H_{E0} &= 192{,}353\,\mathrm{m} + 5{,}614\,\mathrm{m} = 197{,}967\,\mathrm{m} \\ H_{F0} &= 191{,}880\,\mathrm{m} - 0{,}930\,\mathrm{m} = 190{,}950\,\mathrm{m} \end{aligned};\quad \underset{3,1}{\mathbf{H}_0} = \begin{pmatrix} 189{,}641 \\ 197{,}967 \\ 190{,}950 \end{pmatrix}$$

1. A javítási egyenletek tiszta tagjai:

$$l_1 = u_1 - H_{D0} + H_A$$
$$l_2 = u_2 + H_{D0} - H_{E0}$$
$$l_3 = u_3 - H_{E0} + H_B$$
$$l_4 = u_4 + H_{D0} - H_{F0}$$
$$l_5 = u_5 + H_{E0} - H_{F0}$$
$$l_6 = u_6 - H_{F0} + H_C$$
$$l_7 = u_7 - H_{E0} + H_C$$

1. Javítási egyenletek (cm-ben):

$$\begin{aligned} v_1 &= +\delta H_D && && +0 \\ v_2 &= -\delta H_D && +\delta H_E && +1{,}7 \\ v_3 &= && +\delta H_E && +0 \\ v_4 &= -\delta H_D && && +\delta H_F +8{,}5 \\ v_5 &= && -\delta H_E && +\delta H_F +4{,}8 \\ v_6 &= && && +\delta H_F +0 \\ v_7 &= && +\delta H_E && -0{,}9 \end{aligned}$$

$$\underset{7,1}{\mathbf{v}} = \underset{7,3}{\mathbf{A}} \cdot \underset{3,1}{\delta\mathbf{H}} + \underset{7,1}{\mathbf{l}}.$$

Jelölések:

$$\underset{7,3}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underset{3,1}{\delta\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \delta H_3 \end{pmatrix}; \quad \underset{7,1}{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} 0 \\ +1,7 \\ 0 \\ +8,5 \\ +4,8 \\ 0 \\ -0,9 \end{pmatrix}.$$

A súlymátrix:

$$\underset{7,7}{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,16 \end{pmatrix}.$$

A súlyok felvétele a $p_i=c^2/d_i$ képlettel történt, c^2=40 megválasztása mellett.

5. A normál egyenletrendszer együttható-mátrixa és a tisztatag vektor:

$$\underset{3,3}{\mathbf{N}} = \underset{3,7}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,3}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3,615 & -1,180 & -1,223 \\ -1,180 & 4,913 & -1,258 \\ -1,223 & -1,258 & 3,819 \end{pmatrix}; \quad \underset{3,7}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,1}{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} -12,41 \\ -5,07 \\ 16,44 \end{pmatrix}$$

6. A normál egyenletrendszer megoldása:

$$\underset{3,1}{\delta\mathbf{H}} = -\left(\underset{3,7}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,3}{\mathbf{A}}\right)^{-1} \cdot \left(\underset{3,7}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,1}{\mathbf{l}}\right) = -\underset{3,3}{\mathbf{N}}^{-1} \cdot \left(\underset{3,7}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \cdot \underset{7,,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,1}{\mathbf{l}}\right).$$

7. Adjungált mátrix képzése:

a) Az $\underset{3,3}{\mathbf{N}}$ mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsok:

$$N_{1,1} = \begin{vmatrix} 4,913 & -1,258 \\ -1,258 & 3,819 \end{vmatrix} = 17,180; \; N_{1,2} = -\begin{vmatrix} -1,180 & -1,258 \\ -1,223 & 3,819 \end{vmatrix} = 6,045; \; N_{1,3} = \begin{vmatrix} -1,180 & 4,913 \\ -1,223 & -1,258 \end{vmatrix} = 7,494$$

$$N_{2,1} = -\begin{vmatrix} -1,180 & -1,223 \\ -1,258 & 3,819 \end{vmatrix} = 6,045; \; N_{2,2} = \begin{vmatrix} 3,615 & -1,223 \\ -1,223 & 3,819 \end{vmatrix} = 12,310; \; N_{2,3} = -\begin{vmatrix} 3,615 & -1,180 \\ -1,223 & -1,258 \end{vmatrix} = 5,991$$

$$N_{3,1} = \begin{vmatrix} -1,180 & -1,223 \\ 4,913 & -1,258 \end{vmatrix} = 7,494; \; N_{3,2} = -\begin{vmatrix} 3,615 & -1,223 \\ -1,180 & -1,258 \end{vmatrix} = 5,991; \; N_{3,3} = \begin{vmatrix} 3,615 & -1,180 \\ -1,180 & 4,913 \end{vmatrix} = 16,370$$

b) Az aldeterminánsokból képzett mátrix:

$$\underset{3,3}{\mathrm{adj}\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 17{,}1801 & 6{,}0447 & 7{,}4940 \\ 6{,}0447 & 12{,}3101 & 5{,}9909 \\ 7{,}4940 & 5{,}9909 & 16{,}3698 \end{pmatrix}.$$

c) Az eredeti mátrix determinánsa:

$$\det \underset{3,3}{\mathbf{N}} = 3{,}615 \cdot \begin{vmatrix} 4{,}913 & -1{,}258 \\ -1{,}258 & 3{,}819 \end{vmatrix} - (-1{,}180) \cdot \begin{vmatrix} -1{,}180 & -1{,}258 \\ -1{,}223 & 3{,}819 \end{vmatrix} + (-1{,}223) \cdot \begin{vmatrix} -1{,}180 & 4{,}913 \\ -1{,}223 & -1{,}258 \end{vmatrix} =$$

$$= 3{,}615 \cdot 17{,}180 + 1{,}180 \cdot 6{,}045 - 1{,}223 \cdot 7{,}494 = 45{,}8117.$$

d) Az inverz mátrix:

$$\underset{3,3}{\mathbf{Q}_{\delta H}} = \underset{3,3}{\mathbf{N}^{-1}} = \frac{\underset{3,3}{\mathrm{adj}\mathbf{N}}}{\underset{3,3}{\det\mathbf{N}}} = \begin{pmatrix} 0{,}3750 & 0{,}1319 & 0{,}1636 \\ 0{,}1319 & 0{,}2687 & 0{,}1308 \\ 0{,}1636 & 0{,}1308 & 0{,}3573 \end{pmatrix}.$$

8. A keresett ismeretlenek kiegészítő értékei (cm-ben):

$$\underset{3,1}{\delta\mathbf{H}} = -\left(\underset{3,7}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,3}{\mathbf{A}}\right)^{-1} \cdot \left(\underset{3,7}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,1}{\mathbf{l}}\right) = -\begin{pmatrix} 0{,}3750 & 0{,}1319 & 0{,}1636 \\ 0{,}1319 & 0{,}2687 & 0{,}1308 \\ 0{,}1636 & 0{,}1308 & 0{,}3573 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12{,}41 \\ -5{,}07 \\ 16{,}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}633 \\ 0{,}851 \\ -3{,}180 \end{pmatrix}.$$

9. Kiegyenlített magasságok (m-ben):

$$\underset{3,1}{\overline{\mathbf{H}}} = \underset{3,1}{\mathbf{H}_0} - \underset{3,1}{\delta\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 189{,}615 \\ 197{,}958 \\ 190{,}982 \end{pmatrix}.$$

10. Megbízhatósági mérőszámok:

$$\underset{7,1}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = (+2{,}63 \;\; -0{,}08 \;\; +0{,}85 \;\; +2{,}69 \;\; +0{,}77 \;\; -3{,}18 \;\; -0{,}05)\,\mathrm{cm};$$

$$\mu_0^2 = \frac{\underset{1,7}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,1}{\mathbf{v}}}{n-m} = \frac{\underset{1,7}{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{7,7}{\mathbf{P}} \cdot \underset{7,1}{\mathbf{v}}}{7-3} = \frac{32{,}48}{4} = 8{,}12;$$

A súlyegység középhibája: $\mu_0 = \pm 2{,}85$.

Az ismeretlenek kiegyenlítés utáni középhibái:

$$\mu_{\delta H_1} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{11}} = \pm 2{,}85 \cdot \sqrt{0{,}3750} = \pm 1{,}75\,\mathrm{cm}$$
$$\mu_{\delta H_2} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{22}} = \pm 2{,}85 \cdot \sqrt{0{,}2687} = \pm 1{,}48\,\mathrm{cm}$$
$$\mu_{\delta H_3} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{33}} = \pm 2{,}85 \cdot \sqrt{0{,}3573} = \pm 1{,}70\,\mathrm{cm}.$$

Eredmények táblázatos összefoglalása:

Mérendő mennyiségek U_i	Mérési eredmények u_i, m	Szintezési vonal hossza d_i , km	Magasság-különbségek	Súlyok $p_i = 40/d_i$	Kiegyenlített mérési eredmények $\bar{u}_i = u_i - v_i$, m
1	+6,135	33,0	$H_D - H_A$	1,21	6,109
2	+8,343	33,9	$- H_D + Z_2$	1,18	8,344
3	+5,614	30,4	$H_E - H_B$	1,32	5,605
4	+1,394	32,7	$- H_D + H_F$	1,22	1,367
5	-6,969	31,8	$- H_E + H_F$	1,26	-6,977
6	-0,930	29,9	$H_F - H_C$	1,34	-0,898
7	+6,078	34,5	$H_E - H_C$	1,16	6,078

Ismeretlen pontok	Kiegyenlített tengerszint feletti magasságok, m
H_D	189,615
H_E	197,958
H_F	190,982

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: *Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban,* NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár,