GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

1. hét

Másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek

Lovics Gábor

Másodfokú függvények

A kvadratikus függvény

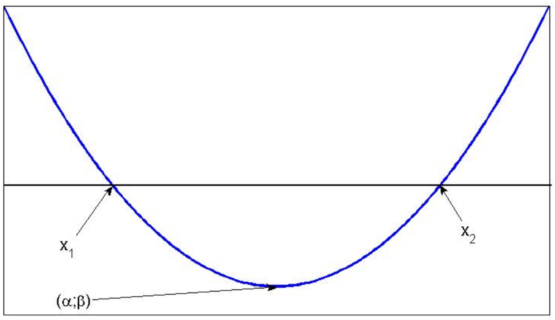
A függvény általános alakja: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. Ekkor a függvény gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

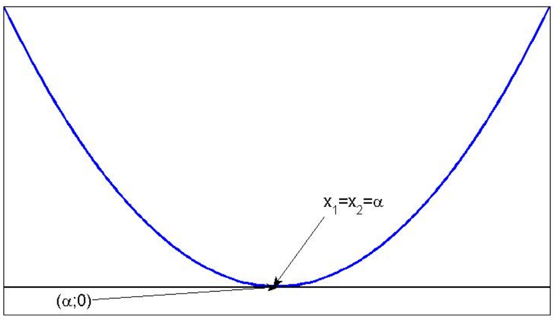
feltéve, hogy a kifejezés értelmes. A másodfokú polinom *diszkriminánsán* a $D = b^2 - 4ac$ kifejezést értjük. Teljes négyzetté alakítással a kifejezés $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ formára hozható. Ekkor a függvény szélsőérték helye α, értéke pedig β. A függvény gyöktényezős alakja: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ feltéve, ha a kifejezésnek léteznek gyökei. (Előfordulhat, hogy $x_1 = x_2$.)

Grafikus alakok

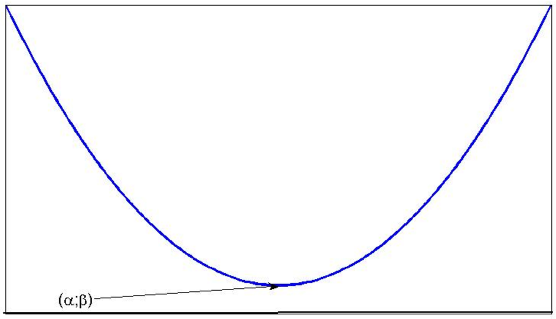
1. eset $a > 0$, $D > 0$.



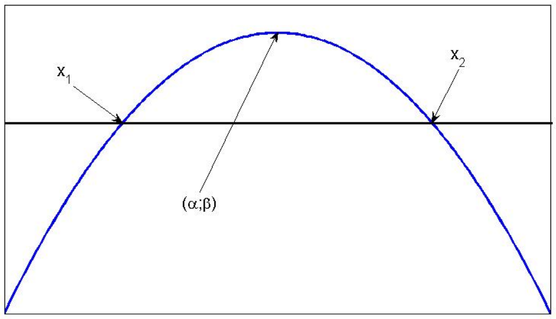
2. eset $a > 0$, $D = 0$.



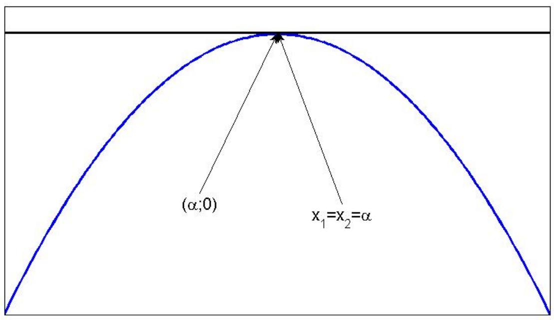
3. eset $a > 0$, $D < 0$.



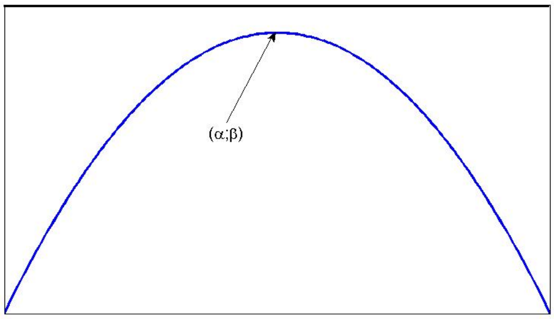
4. eset $a < 0$, $D > 0$,



5. eset $a < 0$, $D = 0$.



6. eset $a < 0$, $D < 0$.



Másodfokú egyenletek

Feladatok

Adott az $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ alakú függvény.

1. Mi a függvény legbővebb értelmezési tartománya?
2. Mik a függvény gyökei (zérushelyei)?
3. Van-e a függvénynek minimuma és/vagy maximuma? Ha van, akkor mi a minimum, illetve maximum helye és értéke? Alakítsd át a függvényt olyan formára, hogy ez leolvasható legyen!
4. Hol monoton fogyó, illetve hol monoton növekedő a függvény?
5. Mi a függvény értékkészlete?

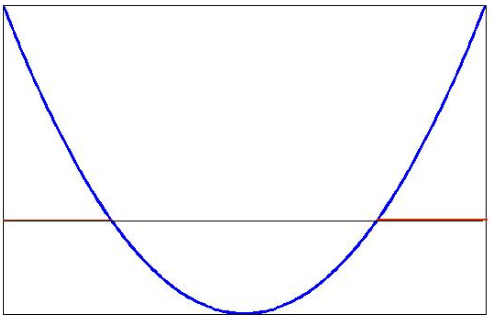
Megoldás

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. A feladat lényegében egy másodfokú egyenlet megoldása:
$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}.$$
3. A szélsőértékek deriválással is megkereshetők, de ha azt nem alkalmazhatjuk, akkor a teljes négyzetté alakítással kaphatunk olyan formát, amelyről leolvashatók ezek az értékek.
$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x - 6 = 3[x^2 + x - 2] = 3[(x + 0,5)^2 - 0,25 - 2] = \\ =3(x + 0,5)^2 - 6,75 \end{aligned}$$
A függvény tehát felfelé néző parabola két gyökkel, minimum helye a $-0,5$, a hozzá tatozó függvényérték pedig a $-6,75$.
4. Az előző pont megoldásából következik, hogy a függvény a $(-\infty; -0,5]$ inervallumon monoton fogyó, a $(-0,5; \infty)$ intervallumon pedig monoton növő.
5. $R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -6,25\}$.

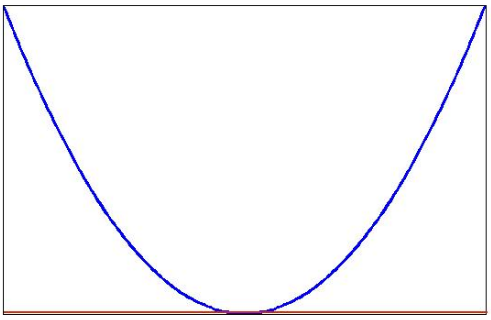
Másodfokú egyenlőtlenségek

Ábrák

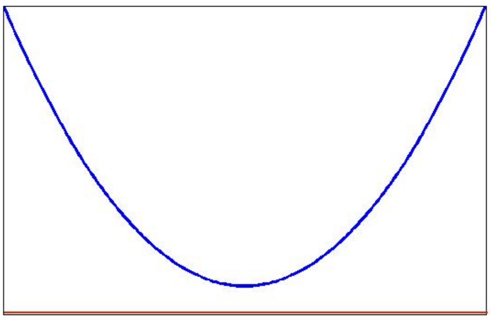
$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad$ 1. eset $a > 0,\ D > 0.$



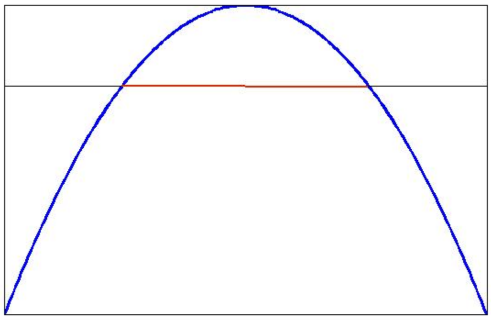
$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad$ 2. eset $a > 0,\ D = 0.$



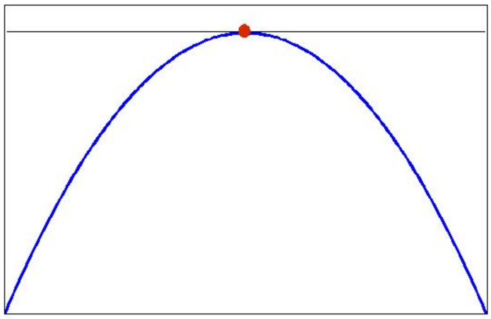
$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad$ 3. eset $a > 0,\ D < 0.$



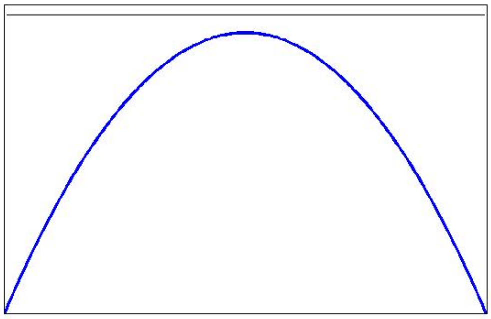
$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad$ 4. eset $a < 0,\ D > 0.$



$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad 5.\ \text{eset}\ a < 0,\ D = 0.$$



$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad 6.\ \text{eset}\ a < 0,\ D < 0.$$



Feladat

Keressük meg a következő egyenlőtlenség összes megoldását:

$$x^2 + 2x - 15 \geq 0!$$

A feladat megoldása:

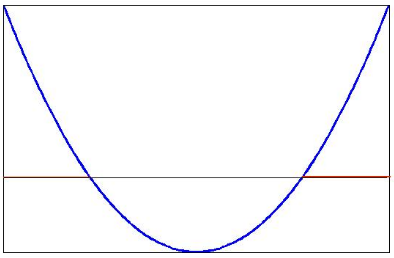
Írjuk át az egyenlőtlenséget egyenlőséggé:

$$x^2 - 2x + 15 = 0!$$

Oldjuk megy az egyenlőséget:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a fenti 6 esetből, melyikkel van dolgunk. 1. eset $a = 1 > 0$, $D = 64 > 0$.



Tehát a megoldás: $(-\infty; -5] \cup [3; \infty)$.

Feladat

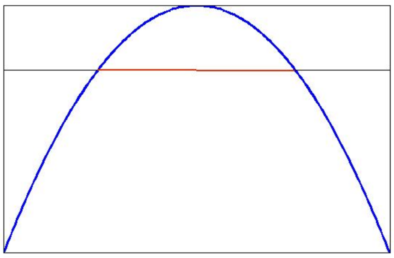
Keressük meg a következő egyenlőtlenség összes megoldását:

$$-\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 4} \geq 0.$$

A feladat megoldásának alapötlete, hogy egy tört pontosan akkor pozitív, ha a számlalója és a nevezője azonos előjelű. Ebben az esetben ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy két egyenlőtlenséget kell megoldanunk, és ezek eredményeit összevetve kell eldöntenünk a tört előjelét. A számláló:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}.$$

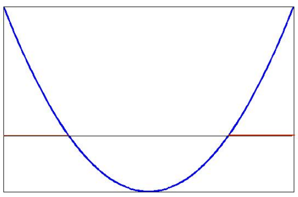
Ezúttal ez a 4. ese:t $a = -1 < 0$, $D = 49 > 0$.



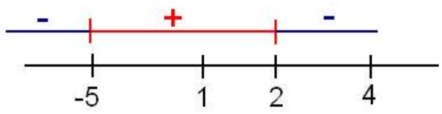
Tehát a számláló a $[-5; 2]$ intervallumon nem negatív, ezen kívül negatív. A nevező (ne felejtsük el, hogy a nevező nem lehet 0):

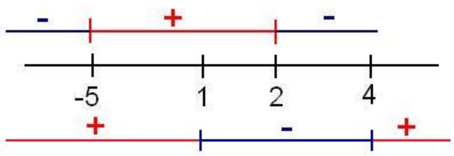
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}.$$

Ez megint az első eset.



Tehát a nevező a $(-\infty; 1)$ és a $(4; \infty)$ intervallumokon nem negatív, ezen kívül negatív. Az eredményeket érdemes egy újabb ábrán összesíteni:





Ez alapján a feladat megoldása a $[-5; 1)$ és $[2; 4)$ intervallumok.