GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041pályázati projekt keretében

Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén

az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,

az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,

és a Balassi Kiadó

közreműködésével.

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió
támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

2. hét
ABSZOLÚTÉRTÉKES FELADATOK ÉS GEOMETRIAI ALAPOK

Készítette: Lovics Gábor
Szakmai felelős: Lovics Gábor

Vázlat

1. Abszolútérték

2. Elemi geometria

Alapfogalmak

Definíció

Legyen $f(x)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tetszőleges függvény. Ekkor a* $g(x) = |f(x)|$ *jelentése:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & ha \;\; f(x) \geq 0 \\ -f(x), & ha \;\; f(x) < 0. \end{cases}$$

Az abszuolútértékes feladatok megoldásánál tipikusan az abszolútérték definícióját kell használni. Először megállapítjuk, hogy az abszolútértékben szereplő kifejezés mikor nagyobb, illetve kisebb, mint nulla, és a kapott intervallumokon külön-külön oldjuk meg a feldatot, $f(x)$-et, illetve $-f(x)$-et használva.

Feladatok

Oldd meg a következő egyenleteket!

1. $|2x+3|-1=|2x^2-x-1|$
2. $(3|x|-3)^2=|x|+7$
3. $x^2-|5x+8|>0$

Megoldások

1. A feladat két abszolútértékes kifejezést is tartalmaz. Ehhez megint érdemes egy olyan ábrát készíteni, ami az abszolútértékben lévő kifejezés előjelét tertalmazza.
   Kezdjük a bal odallal:

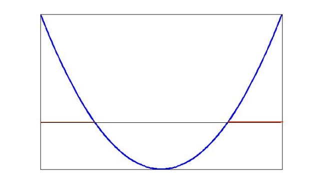
$$
\begin{aligned}
2x + 3 &\geq 0 \\
x &\geq -\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

   A jobb oldal:

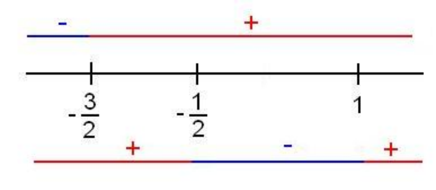
$$
\begin{aligned}
2x^2 - x - 1 &\geq 0 \\
x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} &= \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

   A másodfokú egyenlőtlenség tehát a korábban tárgyalt esetek közül megint az elsőbe sorolható.

Megoldások (folyt.)



Tehát a jobb oldal nemnegatív, ha $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; \infty)$.



Megoldások (folyt.)

1. eset: $x < -\frac{3}{2}$.

$$-2x - 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$$
$$2x^2 + x + 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{4} = \dots$$

2. eset: $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$ vagy $1 < x$.

$$2x + 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$$
$$2x^2 - 3x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

A két gyök eleme a megfelelő halmaznak, ezért találtunk két megoldást.

Megoldások (folyt.)

3. eset: $-\frac{1}{2} < x \leq 1$.

$$2x + 3 - 1 = -2x^2 + x + 1$$
$$2x^2 + x + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}.$$

Tehát a feladat megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Megoldások (folyt.)

2. Ebben a feladatban az $|x|$-et úgy kell kezelni, mint egy változót.

$$
\begin{aligned}
(3|x|-3)^2 &= |x|+7\\
9|x|^2-18|x|+9 &= |x|+7\\
9|x|^2-19|x|+2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$|x|_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361-72}}{18} = \frac{19 \pm 17}{18} \begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Tehát a megoldás:

$$x \in \{-2; -\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; 2\}.$$

Megoldások (folyt.)

3. Az egyenlőtlenségeket lényegében ugyanazzal az esetszétválasztással kell megoldanunk, amit már korábban az egyenleteknél láttunk.

$$x^2 - |5x - 8| > 0$$

Elsőnek tehát azt vizsgáljuk, hogy az a kifejezés, amelynek az abszolútértékét vettük, mikor vált előjelet:

$$\begin{aligned} 5x - 8 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{8}{5}. \end{aligned}$$

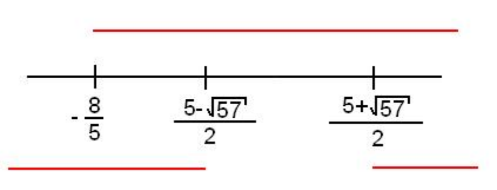
1. eset: $x \geq -\frac{8}{5}$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 8 &> 0 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2} &= \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}. \end{aligned}$$

Megoldások (folyt.)

Az első eset megoldása tehát:

$$\left[-\frac{8}{5};\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{2};\infty\right)$$



Megoldások (folyt.)

2. eset: $x < -\frac{8}{5}$

$$x^2 + 5x + 8 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} = \ldots$$

Ez alapján a másodfokú kifejezés mindig nagyobb, mint nulla. Ezért a második eset megoldása:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{8}{5}\right).$$

A feladat teljes megoldása tehát:

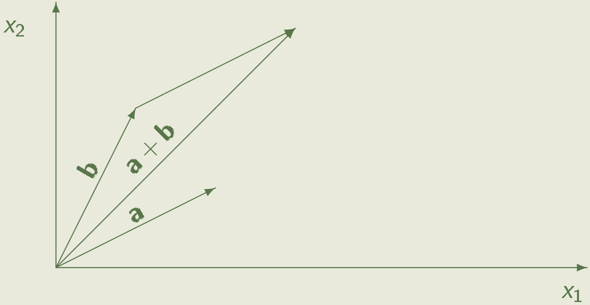
$$\left(-\infty; -\frac{8}{5}\right) \cup \left[-\frac{8}{5}; \frac{5 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2}; \infty\right) =$$

$$= \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2}; \infty\right).$$

Általános háromszögek

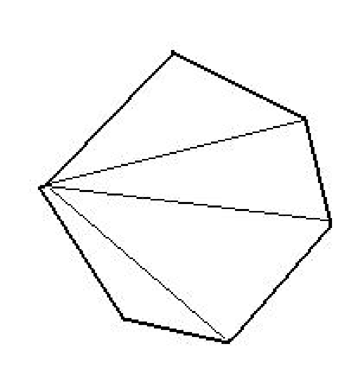
A háromszög három oldalából bármely kettő hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza. Ezt az összefüggést háromszög-egyenlőtlenségnek nevezzük. Mivel $\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok háromszöget alkotnak, ezért

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$



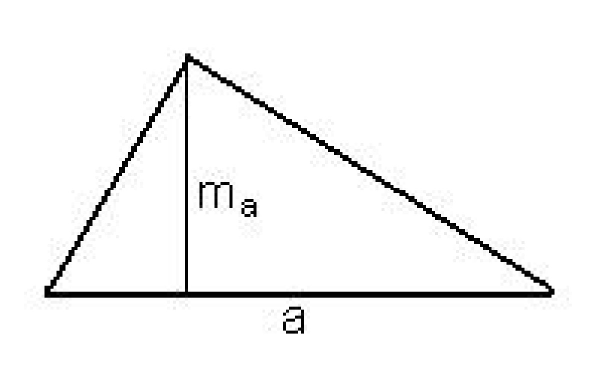
Általános háromszögek (folyt.)

A háromszögek belső szögeinek összege 180°. Mivel egy általános n szög mindig felbontható $(n-2)$ db olyan háromszöggé, amelyek belső szögeinek összege megegyezik az n szög belső szögeinek összegével, ezért egy n szög belső szögeinek összege: $(n-2)180°$.



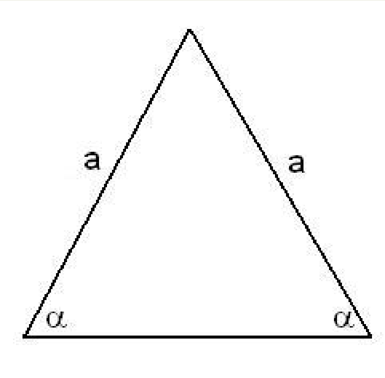
Általános háromszögek (folyt.)

A háromszögek területe a következő képlettel számolható ki: $T = \frac{am_a}{2}$.



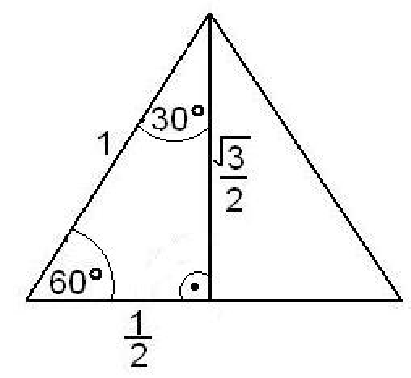
Speciális háromszögek

Egyenlő szárú háromszög



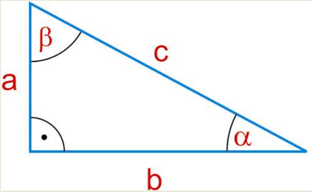
Egyenlő oldalú háromszög

Speciális háromszögek (folyt.)



Speciális háromszögek (folyt.)

Derékszögű háromszög



Derékszögű háromszögben igaz a Pitagorász-tétel: egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha létezik két olyan oldala (a és b), melyek hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal (c) hosszának négyzetével. Vagyis

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Igaz továbbá a Thálesz-tétel, mely szerint egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha három csúcsából kettő egy kör átmérőjének végpontja, a harmadik pedig a körön található.

A kör

A kör egy ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra (sugár) lévő pontok halmaza. Legyen a kör sugara r, ekkor a kör kerületének és területének képlete:

$$K = 2r\pi; \quad T = r^2\pi.$$

A kör tetszőleges pontjához húzott sugár és érintő mindig merőleges egymásra.