GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041pályázati projekt keretében

Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén

az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,

az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,

és a Balassi Kiadó

közreműködésével.

SZÉCHENYI TERV

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió
támogatásával valósul meg.

ELTE ECON

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

3. hét
TRIGONOMETRIA

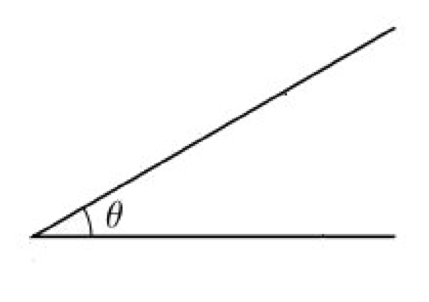
Készítette: Lovics Gábor
Szakmai felelős: Lovics Gábor

Vázlat

A szögek értelmezése

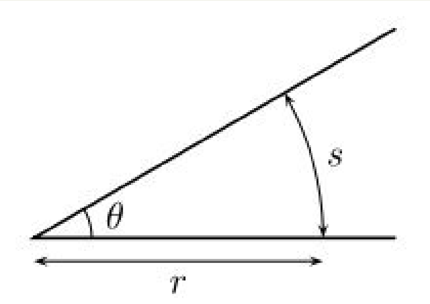
Definíció

A sík egy pontjából (szög csúcsa) induló két félegyenest (szárak) szögnek hívunk. A szög jelentheti a félegyenesek által határolt síkszeletet (szögtartomány), illetve a félegyeneseket is (szögvonal). Azt, hogy a két szögtartomány közül melyikről van szó, a szárak közé rajzolt körívvel jelezzük.
Amennyiben a szög forgást jelöl, forgásszögekről beszélünk. Ebben az esetben értelmes előjeles szögről beszélni, a pozitív előjel az óramutató járásával ellentétes forgásirányt jelöli.



Mértékegységek

A θ szög méréséhez egy körívet húzunk, melynek középpontja a szög csúcsa. Legyen a körív hossza s, a kör sugara pedig r. Ekkor a szög radiánban való mértékét az $\frac{s}{r}$ hányados mutatja meg. A teljes kör mértéke 2π. A radián szög mértékegysége a rad, amit általában nem írunk ki.
A szög fokokban való méréséhez a radián szögünket $\frac{180}{\pi}$-vel kell szoroznunk. Így a teljes kör mértéke $360°$ lesz.



Definíciók

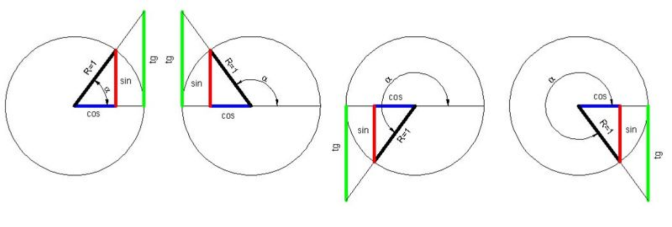
Definíció

Vegyük egy koordináta-rendszerben az $(1,0)$ *vektort, és forgassuk el* α *szöggel. Az így kapott vektor első koordinátáját nevezzük* $\cos\alpha$*-nak, a második koordinátáját pedig* $\sin\alpha$*-nak.*
Legyen α *olyan, melyre teljesül, hogy* $\cos\alpha \neq 0$*. Ekkor:*

$$\tan\alpha = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Legyen α *olyan, melyre teljesül, hogy* $\sin\alpha \neq 0$*. Ekkor:*

$$\cot\alpha = ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



Hegyes szögek szögfüggvényei

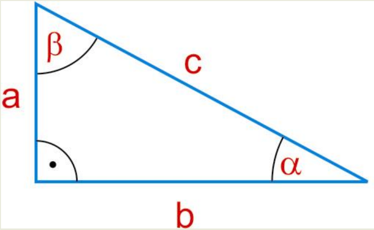
Legyen adott egy derékszögű háromszög, melyben az egyik befogó és az átfogó által bezárt szög α. Az α-val szemközti oldal legyen a, a másik befogó b, az átfogó pedig c. Ekkor a következő összefüggések teljesülnek:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

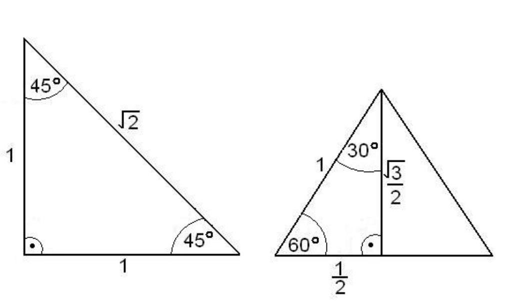
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



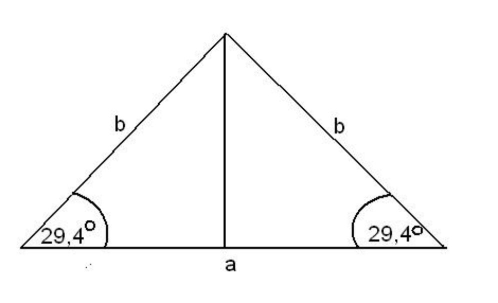
Nevezetes szögek szögfüggvényei

α	sin	cos	tg	ctg
$0°$	0	1	0	-
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	1	0	-	0



Példa trigonometrikus összefüggések alkalmazására

Mekkorák annak az egyenlőszárú háromszögnek az oldalai, melynek az alapja 30,4 cm-rel hosszabb a száraknál, és amelyiknek az alapon fekvő szögei $29,4^\circ$-ak?
Megoldás



Példa trigonometrikus összefüggések alkalmazására (folyt.)

A feladat felrajzolásakor érdemes berajzolni az alaphoz tartozó magasságot. Ekkor ez a magasság, az eredeti háromszög egyik szára (b) és az alapjának a fele $\left(\frac{a}{2}\right)$ egy derékszögű háromszöget alkot. Erről a háromszögről a feladat szövege és az ábra alapján tudható, hogy

$$a - b = 30,4$$
$$cos 29,4^\circ = \frac{a}{2b}.$$

Meghatározva a $29,4^\circ$ koszinuszát a második egyenletből kapjuk, hogy

$$0,87 = \frac{a}{2b}$$
$$a = 1,74b.$$

Példa trigonometrikus összefüggések alkalmazására (folyt.)

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy

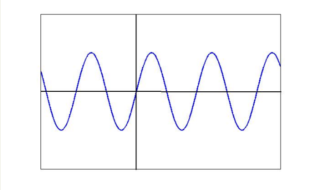
$$1,74b - b = 0,74b = 30,4$$
$$b = 41.$$

Ebből kapjuk hogy

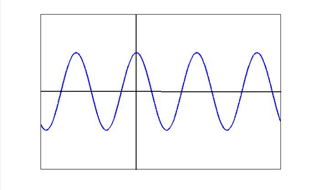
$$a = 41 + 30,4 = 71,4.$$

Trigonometrikus függvények grafikonjai

$\sin x$

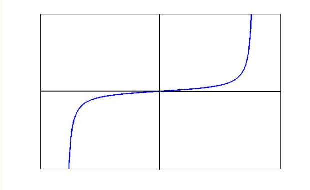


$\cos x$

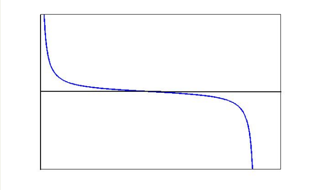


Trigonometrikus függvények grafikonjai (folyt.)

$\mathrm{tg}x$



$\mathrm{ctg}x$

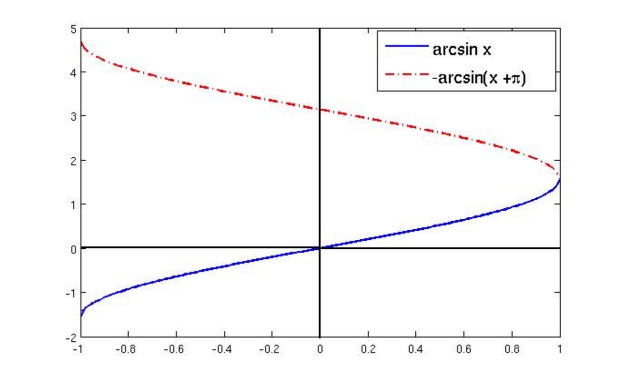


Trigonometrikus függvények inverze

Emlékezzünk vissza, hogy az $f(x) = x^2$ függvénynek sem volt inverze a valós számok halmazán. Viszont, ha az értelmezési tartományát megszorítjuk a nemnegatív számok halmazára, akkor már invertálható függvényt kapunk, amelynek így az értékkészlete lett a nemnegatív számok halmaza. A trigonometrikus függvények inverze is hasonló trükkel értelmezhető.
Mivel periódikus függvényekről van szó, ezért először is azt kell eldöntenünk, hogy melyik periódusra szorítjuk meg az értelmezési tartományt. Mivel a szinusz és a koszinusz függvények egy perióduson belül sem kölcsönösen egyértelmű hozzárendelések, ezért a perióduson belül is meg kell szorítsuk a függvényt.

Trigonometrikus függvények inverze (folyt.)

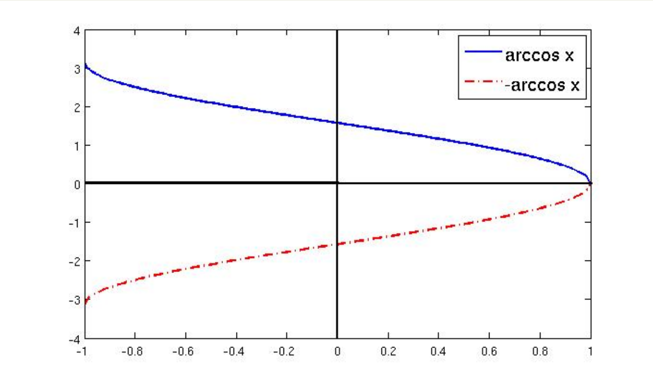
A szinusz függvényt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz szinusz függvénynek hívjuk, jele: $\arcsin x$, értelmezési tartománya a $[-1; 1]$, értékészlete pedig a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



Ha a függvényt a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumra szorítjuk meg, és úgy invertáljuk, akkor $-\arcsin x$ függvényhez jutunk.

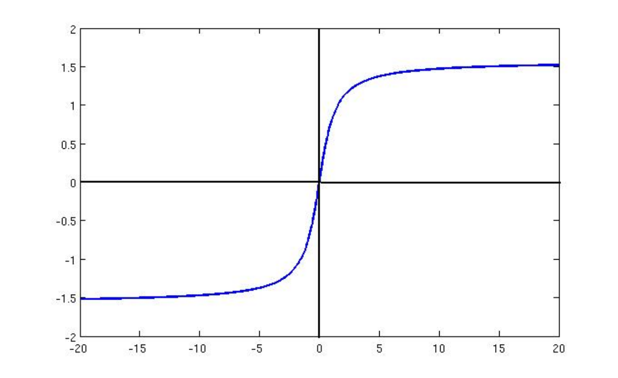
Trigonometrikus függvények inverze (folyt.)

A koszinusz függvényt a $[0;\pi]$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz koszinusz függvénynek hívjuk, jele: $\arccos x$, értelmezési tartománya a $[-1;1]$, értékkészlete pedig a $[0;\pi]$.



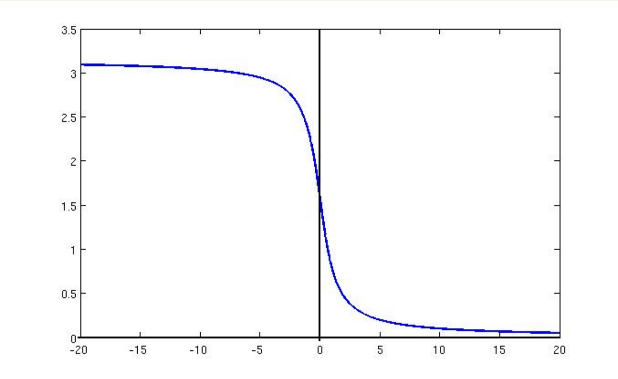
Trigonometrikus függvények inverze (folyt.)

A tangens függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz tangens függvénynek hívjuk, jele: $\mathrm{arctg} x$, értelmezési tartománya a $(-\infty; \infty)$, értékkészlete pedig a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



Trigonometrikus függvények inverze (folyt.)

A kotangens függvényt a $(0; \pi)$ intervallumra megszorítva kapunk invertálható függvényt. Az így kapott függvényt árkusz kotangens függvénynek hívjuk, jele: $\mathrm{arcctg} x$, értelmezési tartománya a $(-\infty; \infty)$, értékkészlete pedig a $[0; \pi]$.



Deriválási szabályok

$$\sin' x = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos' x = -\sin x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad k\pi + \frac{\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad k\pi \neq x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in [-1;1]$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in [-1;1]$$

$$\mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Vektorok polárkoordinátás alakja

Legyen adva egy $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ vektor. Ez a vektor kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy $(r; \phi) \in \mathbb{R}_{\oplus} \times [0; 2\pi]$ úgynevezett polárkoordinátákkal adott vektornak. A megfeleltetést a következő szabályok írják le.

Ha $(x_1; x_2)$-t ismerem, akkor

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
\phi &= \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\
\phi &= \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},
\end{aligned}
$$

ahol a második két egyenletre azért van szükség, mert a $[0, 2\pi]$ intervallumban a két egyenlet együttesen hatátozza meg ϕ-t.

Visszafelé, ha (r, ϕ) ismert, akkor

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \phi, \\
x_2 &= r \sin \phi.
\end{aligned}
$$

Polárkoordináták kiszámítása a gyakorlatban

Határozzuk meg a $(2, 3)$ vektor polárkoordínátás alakját!
Ehhez először is ki kell számoljuk a vektor hosszát

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Ezután határozzuk meg a vektorhoz tartozó hajlásszöget. Ezt a gyakorlatban kicsit máshogy érdemes kiszámolni, mint ahogy azt a fenti képlet mutatja. Használjuk, ki hogy

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{3}{2}.$$

Ekkor $\phi = 56,31°$ vagy $\phi = 263,31°$. Mivel a szög nyilván az első síknegyedben van, ezért $\phi = 56,31°$.