GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

4. hét

Komplex számok

Lovics Gábor

Alapfogalmak

Történeti bevezetés

A másodfokú egyenlet megoldóképletét már az ókorban is ismerték. Természetes volt az igény arra, hogy harmad- és magasabb fokú egyenleteket is meg akartak oldani. A harmadfokú egyenlet általános megoldására a 16. századig várni kellett. (Speciális alakú egyenleteket korábban is megoldottak, de ezeket titokban tartották.) Az egyenlet megoldása azért tartott ilyen sokáig, mert a megoldáshoz bővíteni kellett a valós számok halmazát. A megoldóképletben ugyanis gyököt kell vonni negatív számokból. Mára ismertté vált, hogy ötöd- és annál magasabb fokú egyenleteknek nincs megoldóképlete, ráadásul a harmad- és negyedfokú egyenletet is inkább számítógépekkel oldjuk meg, mint analitikus képletekkel. Az új számok azonban több más területen is hasznosnak bizonyultak.

Gondolkodjunk

A valós számkör bővítésénél arra törökszünk, hogy a valós számokon definiált műveletek és az azoknál megszokott műveleti azonosságok a bővített számkörben is igazak legyenek. Az új számokat úgy érdemes tehát definiálni, hogy igazak legyenek a következő átalakítások:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)\cdot 4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1)\cdot 3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}.$$

Ezen átalakításokat felhasználva könnyen megmutatható, hogy az összes olyan szám, amelyet négyzetre emelve negatív számot kapunk, előáll a következő alakban:

$$a\sqrt{-1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Mivel ezek a számok nem valósak, ezért azokat képzetes (képzelt) vagy immaginárius számoknak nevezzük.

Az i

Mivel az összes immaginárius szám képezhető mint a $\sqrt{-1}$ többszöröse, ezért érdemes bevezetni az

$$i = \sqrt{-1}$$

jelölést. Kérdés, hogy hogyan végezzünk műveleteket ezekkel a képzetes számokkal. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, ekkor a képzetes számok össszege:

$$ai + bi = a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} = (a+b)\sqrt{-1} = (a+b)i;$$

képzetes számok szorzata:

$$(ai)(bi) = (a\sqrt{-1})(b\sqrt{-1}) = ab\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -ab;$$

képzetes szám és valós szám összege:

$$a + bi = a + b\sqrt{-1};$$

képzetes szám és valós szám szorzata:

$$a(bi) = ab\sqrt{-1}.$$

Komplex számok

Milyen számot kapunk, ha összeadunk egy valós és egy képzetes számot? Ha az így kapott számot négyzetre emeljük, akkor

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

Ennek a számnak a négyzete nem valós, vagyis nem is pozitív, és nem is negatív. Ez azt jelenti, hogy ez a szám nem valós, és nem is képzetes. Azokat a számokat, melyek egy valós és egy képzetes szám összegeként állnak elő, komplex számoknak nevezzük. A komplex számok nyílván tartalmazzák mind a valós mind a képzetes számok halmazát. Kérdés, hogy a komplex számokkal végzett műveletek nem vezetnek-e egy még bővebb számhalmazhoz. Gondoljuk végig, vajon hogyan érdemes műveleteket végezni a komplex számok halmazán. Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i;\\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + cb)i.\end{aligned}$$

Ellentmondás?

Kérdés persze, hogy az új számhalmazban végzett műveletek nem vezetnek-e ellentmondásra. Nézzük meg például a következő átalakítást:

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $1 = -1$, ami nyílván nem igaz. De hol követtük el a hibát? A válasz, hogy valójában nem beszéltük meg, hogy egy komplex számból hogyan vonunk gyököt. Márpedig a fenti esetben az 1 egy speciális komplex szám. Viszont a -1-ből mint speciális számból korábban minden gond nélkül gyököt tudtunk vonni. De azért már ott is felmerült a kérdés, vajon csak egy olyan szám lesz-e ebben az új számhalmazban, amelyet ha négyzetre emelünk, -1-et kapunk? Azért, hogy ezeket a problémákat feloldjuk, érdemes az egész számhalmazt az eddigihez képest fordított logikával felépíteni.

Alapdefiníciók

1. Definíció

Legyen $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. A halmazon az összeadás és a szorzás legyen a következőképpen definiálva:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$
$$a + bi + c + di = a + c + (b + d)i;$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + cb);$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + cb)i.$$

Következmény:

$$i^2 = (0 + i)(0 + i) = (0 \cdot 1 - 1) + (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)i = -1.$$

Az így bevezetett halmazról és műveletekről megmutatható, hogy ellentmondásmentes, sőt kiterjesztése a valós számoknak, és azt is, hogy a valós számoknál megszokott műveleti azonosságok (asszociativitás, disztributivitás, kommutatívitás, inverz műveletek) itt is érvényesek.

Feladatok

Végezzük el a következő műveleteket:

1. $5 + 6i + 4 - 2i$;

2. $(3 + 2i)(7 - i)$!

Megoldások:

- $5 + 6i + 4 - 2i = (5 + 6) + (6 - 2)i = 11 + 4i$;

- (közvetlenül végigszámolva) $(3+2i)(7-i) = 3\cdot 7+(2i)\cdot 7+3\cdot(-i)+(2i)(-i) = 21+14i-3i-2i^2 = 21+14i-3i+2 = 23+11i$ (képletbe behelyettesítve) $(3+2i)(7-i) = (3\cdot 7-2\cdot(-1))(3\cdot(-1)+2\cdot 7)i = 23+11i$

Gyökvonás komplex számokból

2. Definíció
Legyen $z \in \mathbb{C}$, ekkor $\sqrt[n]{z}$ jelölje az összes olyan komplex számot, melyre teljesül, hogy az n-edik hatványa éppen z. Az $\sqrt[n]{1}$ alakban felírható számokat egységgyököknek nevezzük.

Például nézzük meg, mit jelenthet a $\sqrt[4]{1}$. Az 1-re és a -1-re nyilván továbbra is igaz, hogy $1^4 = (-1)^4 = 1$. Mivel $i^2 = -1$, ezért $(i)^4 = 1$, és könnyen látszik az is, hogy $(-i)^4 = 1$. Később azt is látni fogjuk, hogy más megoldás nem lehet. Vizsgáljuk meg most újra a korábban látott ellentmondást. Az átalakításokkal nincs semmi gond, egészen az utolsó lépésig:

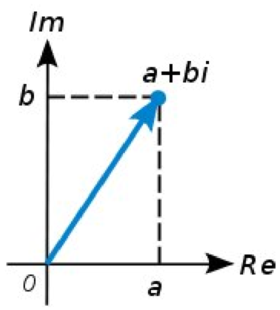
$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1}.$$

Ez a kifejezés viszont nem egyenlő eggyel, csak annyit tudunk, hogy egyenlő egy olyan kifejezéssel, amit ha négyzetre emelünk 1-et kapunk, ami igaz a -1-re.

Geometriai szemléltetés

Komplex számok a síkon

A definíciókból láttuk, hogy a komplex számok definiálhatók mint olyan valós számpárok, amelyeken speciális módon definiálunk műveleteket. Ha az összeadást nézzük, a művelet lényegében megegyezik azzal, ahogy kétdimenziós vektorok összegét definiáltuk. Ez is mutatja, hogy érdemes kétdimmenziós síkban szemlélteni a komplex számokat.

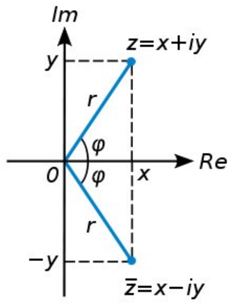


Konjugált és abszolútérték

3. Definíció
Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ alakú. Ekkor z konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi$$

alakban áll elő.



4. Definíció
Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ alakú. Ekkor z abszolútértéke:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

képlettel számolható ki.

1. Tétel
Legyen $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám. Ekkor

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Feladat
Határozd meg a $z = 2 + 3i$ konjugáltját és abszolútértékét!
Megoldás:
ha $z = 2 + 3i$, akkor $\bar{z} = 2 - 3i$. A definíció alapján: $|z| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. A tétel ellenőrzéséhez pedig csak azt kell megnézni, hogy $z\bar{z} = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$.

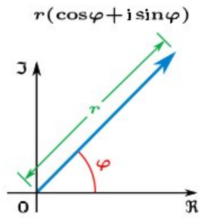
A komplex számok trigonometrikus alakja
A vektorok polárkoordinátás alakját felhasználva a komplex számokat könnyen új alakban írhatjuk fel:

$$z = r(cos(\phi) + i\sin(\phi)),$$

ahol $r = |z|$. Legyen két trigonemtrikus formában adott komplex számunk

$$z_1 = r_1(cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1));$$
$$z_2 = r_2(cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)).$$

Ekkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor, ha $r_1 = r_2$ és $\phi_1 = \phi_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



Legyen például

$$z = 5 - 3i.$$

Ekkor

$$r = |z| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$\text{tg}(\phi) = -\frac{3}{5} = -0,6,$$

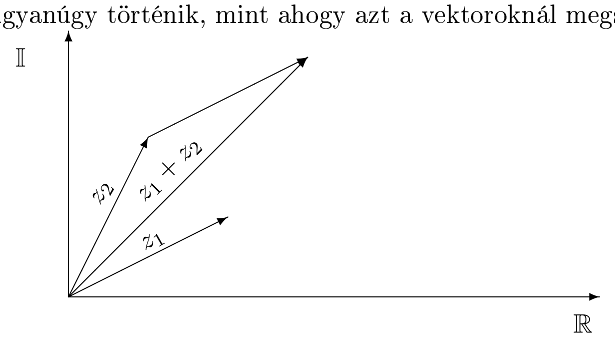
amiből következik, hogy $\phi = 149°$ vagy $\phi = 329°$. Mivel z nyilván a harmadik síknegyedben van, ezért a két alternatíva közül a $329°$ a helyes. Vagyis azt kaptuk, hogy

$$5 - 3i = \sqrt{34}(cos(329°) + i\sin(329°)).$$

Műveletek és polinomok

Komplex számok összeadása

A komplex számok összeadása grafikusan ugyanúgy történik, mint ahogy azt a vektoroknál megszoktuk.



Ebben a trigonometrikus alak nem sokat segít.

Komplex számok szorzása

2. Tétel (Moivre-tétel)
Legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, melyek előállnak a következő alakban:

$$z_1 = r_1(cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1));$$
$$z_2 = r_2(cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)).$$

Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

(Csak érdekességként jegyezzük meg, hogy a fenti képletből számos trigonometrikus azonosság pl. addiciós képletek nagyon gyorsan levezethetők.)

Feladat

Határozzuk meg a trigonometrikus függvény segítségével a $(3 + 2i)(7 - i)$ értékét.
Megoldás
Korábban láttuk, hogy a megoldás $23 + 11i$. Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 7 - i$. Ekkor $|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $|z_2| = \sqrt{7^2 + 1^1} = \sqrt{50}$. Jelölje ϕ_1 a z_1-hez tartozó, ϕ_2 a z_2-höz tartozó szöget. Ekkor $\text{tg}(\phi_1) = \frac{2}{3}$, amiből $\phi_1 = 33,69°$, mert $0° < \phi_1 < 90°$. Valamint $\text{tg}(\phi_2) = -\frac{1}{7}$, amiből $\phi_2 = -8,13°$, mert $-90° < \phi_2 < 0°$. Ezek alapján

$$z_1 z_2 = \sqrt{13 \cdot 50}(\cos(33,69° - 8,13°) + i\sin(33,69° - 8,13°)) =$$
$$= \sqrt{650}(\cos(22,56°) + i\sin(22,56°)) = 22,94 + 10,96i.$$

Hatványozás és gyökvonás

Legyen $z = r(cos(\phi) + i\sin(\phi))$ tetszőleges komplex szám. Ekkor a Moivre-tétel következményeként könnyen láthatjuk, hogy

$$z^n = r^n(cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

A trigonometrikus alak egyik legfőbb erénye, hogy a gyökvonás is viszonylag egyszerűen számolható vele. Sőt, azt a kérdést is tisztázni tudjuk, hogy a komplex számok halmazán hány n-edik gyöke van egy számnak. Keressük azokat a $w \in \mathbb{C}$ számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$w^n = z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = r(\cos(\phi + k2\pi) + i\sin(\phi + k2\pi)).$$

Legyen $w = \rho(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$ alakú. Ekkor

$$\rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos(\phi + k2\pi) + i\sin(\phi + k2\pi)).$$

Ezek alapján egyrészt $\rho^n = r$, vagyis $\sqrt[n]{r} = \rho$. Másrészt

$$\begin{aligned} n\psi &= \phi + k2\pi; \\ \psi &= \frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Kérdés, hány különböző n-edik gyök van. A képletből leolvasható, hogy minden esetben pontosan n, ahol az argumentumok a következők lehetnek:

$$\frac{\phi}{n}; \frac{\phi + 2\pi}{n}; \frac{\phi + 4\pi}{n}; \ldots; \frac{\phi + (n-1)2\pi}{n}.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n})),$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Például keressük meg a $\sqrt[3]{i}$-értékeit. Az i trigonometrikus alakja:

$$i = 1\left((\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Ezért

$$\sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{3}\right) + i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{3}\right),$$

$k = 0, 1, 2$. Vagyis a gyökök a következő alakban írhatók fel:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_3 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i. \end{aligned}$$

A reciprok

3. Tétel

Legyen $z = a + bi$ alakú, tetszőleges nem nulla komplex szám. Ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Példa: $\frac{1}{i}$. Az i konjugáltja $-i$, $i(-i) = 1$, ezért

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i.$$

Ellenőrzés:

$$i(-i) = -(i^2) = -(-1) = 1.$$

Az algebra alaptétele

Egy másodfokú polinomnál egyszerű osztással elérhető, hogy $x^2 + bx + c$ alakú legyen. Ha ennek a polinomnak létezik gyöke, akkor az felírható a következő alakban:

$$(x - x_1)(x - x_2).$$

Abban a speciális esetben, amikor $x_1 = x_2$, azt mondjuk, hogy a polinomnak kétszeres gyöke van. Más szavakkal ezt úgy fejezhetjük ki, hogy egy másodfokú polinomnak multiplicitással számolva vagy 2 vagy 0 db gyöke van. A kérdés áltolánosan is feltehető. Legyen adva egy 1 főegyütthatós, n-ed fokú polinom:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

A kérdés, hogy ez átalakítható-e a következő alakra:

$$(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

ahol $\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_k = n$. Ha átalakítható, akkor azt mondjuk, hogy egy polinomnak multiplicitással számolva éppen annyi gyöke van, ahányad fokú a polinom. Már a másodfokú függvény vizsgálatából is kiderül, hogy a valós számok halmazán csak annyi mondható, hogy minden polinomnak, multiplicitással számolva, legfeljebb annyi gyöke van, ahányad fokú a polinom.

4. Tétel (Az algebra alaptétele)
Legyen $p(z)$ egy komplex együtthatós n-ed fokú polinom. Ennek a polinomnak a komplex számok halmazán, multiplicitással számolva, éppen n db gyöke van.