

# GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN





SZÉCHENYI TERV

# GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében  
Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén  
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,  
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,  
és a Balassi Kiadó  
közreműködésével.



A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség  
[www.ujszechenyiterv.gov.hu](http://www.ujszechenyiterv.gov.hu)  
06 40 638 638



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL



A projekt az Európai Unió  
támogatásával valósul meg.



ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

# Gazdaságmatematika középfaladó szinten

5. hét  
VEKTORTEREK

Készítette: Lovics Gábor  
Szakmai felelős: Lovics Gábor

- 1 A lineáris tér fogalma
- 2 Alterek
- 3 Generálás és függetlenség

## Definíció

*Legyen  $T = \mathbb{R}$  vagy  $T = \mathbb{C}$  halmaz, és legyen  $T$  elemein értelmezve az összeadás és a szorzás a szokásos módon ( $T$  egy úgynevezett számtest). Ekkor a  $V$  halmazt vektortérnek nevezzük a  $T$  test felett, ha értelmezve van rajta egy összeadás ( $V \times V \rightarrow V$ ) és egy skálárral való szorzás ( $T \times V \rightarrow V$ ), melyek kielégítik a következő  $8 = 2 \cdot 4$  axiómát.*

## Definíció (Az összeadás axiómái)

A  $V$  halmazon értelmezett összeadás művelet  $(+)$  minden  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ -hez hozzárendel egy  $V$ -beli elemet.

- ① Az összeadás asszociatív, vagyis bármely  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$  esetén

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

- ② Az összeadás kommutatív, vagyis bármely  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$  esetén

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

- ③ Létezik nullelem, vagyis olyan  $\mathbf{0} \in V$ , amellyel minden  $\mathbf{v} \in V$  esetén

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

- ④ Minden elemnek létezik ellentetje, vagyis minden  $\mathbf{v} \in V$  esetén létezik olyan  $-\mathbf{v} \in V$ , melykre teljesül, hogy

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

## Definíció (A skalárral való szorzás axiómái)

A  $T$  és a  $V$  halmaz között értelmezve van egy skalárral való szorzás művelet, ami minden  $\lambda \in T$  és  $\mathbf{v} \in V$ -hez hozzárendel egy  $V$ -beli elemet.

- ① Bármely  $\lambda, \mu \in T$  és  $\mathbf{v} \in V$  esetén

$$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}.$$

- ② Bármely  $\lambda \in T$  és  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  esetén

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

- ③ Bármely  $\lambda, \mu \in T$  és  $\mathbf{v} \in V$  esetén

$$(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v}).$$

- ④ Bármely  $\mathbf{v} \in V$ -re

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$



Az általunk vizsgált példákban  $T = \mathbb{R}$  lesz, vagyis a valós számok feletti vektortereket fogjuk vizsgálni.

- 1 Az origóból kiinduló sík-, illetve térvektorok, a szokásos vektorműveletekre nézve.
- 2 Az  $\mathbb{R}^n$ , ha a műveleteket a szokásos módon komponensenként értelmezzük.
- 3 A polinomok a rajtuk végzett szokásos műveletekkel.
- 4 A folytonos függvények halmaza, a szokásos függvényműveletekkel.
- 5 A deriválható függvények a szokásos függvényműveletekkel.
- 6 A sorozatok a velük végzett szokásos műveletekkel.

# Feladat

Mutassuk meg, hogy a legfeljebb harmadfokú polinomok vektorteret alkotnak a valós számok felett, a szokásos műveletekkel.

Megoldás

Ahhoz, hogy egy halmazról és a rajta végzett műveletekről belásuk, hogy vektortér, a korábban látott összes axióma teljesülését le kell ellenőriznünk.

- 1 Legfeljebb harmadfokú polinomok összege legfeljebb harmadfokú polinom.
- 2 Legfeljebb harmadfokú polinom számszorosa is legfeljebb harmadfokú polinom.
- 3 Ha  $p$ ,  $q$  és  $r$  legfeljebb harmadfokú polinomok, akkor valóban teljesül, hogy  $(p + q) + r = p + (q + r)$ , hiszen ez általában minden függvényre teljesül.
- 4 Ha  $p$  és  $q$  legfeljebb harmadfokú polinomok, akkor valóban teljesül, hogy  $p + q = q + p$ , hiszen ez általában minden függvényre teljesül.

## Feladat (folyt.)

- 5 A konstans nulla függvény mint speciális polinom lesz az összeadásra nézve a neutrális elem, hiszen, ha  $\mathbf{0}$  a konstans nulla függvényt jelöli, és  $p$  egy tetszőleges legfeljebb harmadfokú polinom, akkor  $p + \mathbf{0} = p$ .
- 6 Minden  $p$  legfeljebb harmadfokú polinomra igaz, hogy van egy olyan  $q$  legfeljebb harmadfokú polinom, amelyre  $p + q = \mathbf{0}$ .
- 7 Ha  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $p$  legfeljebb harmadfokú polinom, akkor  $(\lambda + \mu)p = \lambda p + \mu p$ , hiszen ez minden függvényre teljesül.
- 8 Ha  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $p, q$  legfeljebb harmadfokú polinomok, akkor  $\lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q$ , hiszen ez minden függvényre teljesül.
- 9 Ha  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $p$  legfeljebb harmadfokú polinom, akkor  $\lambda(\mu p) = (\lambda\mu)p$ , hiszen ez minden függvényre teljesül.
- 10 Ha  $p$  legfeljebb harmadfokú polinom, akkor  $1p = p$ , hiszen ez minden függvényre teljesül.

Láthatjuk, hogy egy ilyen jellegű állításnak a bizonyítása meglehetősen hosszadalmas, pedig a legtöbb része egyszerűen következett a függvények tulajdonságából. A következő nagyon sok tekintetben hasznos fogalom, az ilyen jellegű bizonyításokat is nagymértékben leegyszerűsíti.

## Definíció

Legyen  $V$  vektortér  $T$  felett és  $W \subseteq V$ . Ekkor  $W$  altere  $V$ -nek, ha  $W$  maga is vektortér  $T$  felett, ugyanazokkal a műveletekkel, mint  $V$ . Triviális altereknek hívjuk a  $W = V$  és  $W = \{\mathbf{0}\}$  altereket. Jelölés:

$$W \leq V.$$

## Tétel

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  felett. Ekkor  $W \subseteq V$  altere  $V$ -nek pontosan akkor, ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W &\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W, \\ \mathbf{v} \in W, \lambda \in T &\Rightarrow \lambda \mathbf{v} \in W. \end{aligned}$$

# A lineáris altér (folyt.)

5. hét

Lovics

A lineáris tér  
fogalma

**Altér**

Generálás és  
függetlenség

Példák altérre:

- 1 A síkon az összes origon átmenő egyenes, a térben az összes origon átmenő sík.
- 2 Legyen  $V$  tetszőleges vektortér. Ekkor tetszőleges  $\mathbf{v} \in V$  esetén a  $\lambda\mathbf{v}$  alakú vektorok alteret alkotnak.
- 3 A legfeljebb másodfokú polinomok a polinomok között.
- 4 A polinomok a deriválható függvények között.

Ellenőrizzük most le, hogy a legfeljebb harmadfokú polinomok vektorteret alkotnak-e!

Megoldás

Mivel a legfeljebb harmadfokú polinomok részhalmaza a polinomoknak, és mivel utóbbi vektortér, ezért elég azt ellenőrizni, hogy

- 1 Legfeljebb harmadfokú polinomok összege legfeljebb harmadfokú polinom.
- 2 Legfeljebb harmadfokú polinom számszorosa is legfeljebb harmadfokú polinom.

# Feladat (folyt.)

5. hét

Lovics

A lineáris tér  
fogalma

**Altér**

Generálás és  
függetlenség

Ellenőrizzük le, hogy a harmadfokú polinomok vektorteret alkotnak-e a szokásos függvényműveletekkel!

Megoldás

Itt is elegendő a tételben szereplő két tulajdonságot leellenőrizni, azonban, mivel például  $x^3 + (-x^3) = 0$ , és a 0 nem harmadfokú polinom, ezért láthatjuk, hogy ez nem vektortér.

## Definíció

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test felett, legyen  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ , valamint  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in T$ . Ekkor a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n$$

kifejezést a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vektorok  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  súlyokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

## Definíció

Legyenek adva  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  vektorok a  $V$  vektortérben. Ekkor a  $\mathbf{v}_i$  vektorok által generált halmazon a következő  $U$  halmazt értjük:

$$U = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in T\}.$$



# Generálás (folyt.)

5. hét

Lovics

A lineáris tér  
fogalma

Alterek

Generálás és  
függetlenség

Könnyen bizonyítható, hogy a definícióban szereplő  $U$  halmaz alteret alkot a  $V$  vektortéren, ezért az  $U$ -t a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vektorok generált alterének nevezzük.

Jelölés:

$$U = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle .$$

## Definíció

Legyenek  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  vektorok olyanok, amelyekre

$$V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle ,$$

akkor azt mondjuk, hogy a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vektorok generátorrendszert alkotnak.

# Generálás (folyt.)

Generálás esetén mindig csak véges sok vektor lineáris kombinációjáról beszéltünk. Felmerülhet a kérdés, hogy mi történik akkor, ha azt vizsgáljuk, hogy végtelen sok elemet tartalmazó halmaz milyen vektorokat generál. Megtehetjük, de a lineáris kombinációba ilyenkor is tetszőlegesen sok, de csak véges számú vektort vehetünk bele. Végtelen sok vektor lineáris kombinációja esetén még az sem biztosítható ugyanis, hogy az eredmény az eredeti vektortérben legyen.

Például vizsgáljuk a valós együtthatós polinomok halmazát mint vektorteret, és benne az  $1, x^2, x^3, \dots$  vektorrendszert.

Megmutatható, hogy ezen vektorok végtelen lineáris kombinációja lehet például:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

# Feladat

5. hét

Lovics

A lineáris tér  
fogalma

Alterek

Generálás és  
függetlenség

Mutassuk meg, hogy az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vektorok generátorrendszert alkotnak  $\mathbb{R}^3$ .

Megoldás

Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  vektor előáll mint a fenti vektorok lineáris kombinációja, vagyis, hogy léteznek olyan  $x$ ,  $y$ ,  $z$  valós számok, melyekre:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ez valójában nem más, mint az

## Feladat (folyt.)

$$x + y + z = a$$

$$x + y = b$$

$$x = c$$

egyenlet. Ennek pedig biztosan létezik megoldása, mégpedig az  $x = c$ ,  $y = b - c$ ,  $z = a - b - c$ .

## Definíció

Legyen  $V$  vektortér  $T$  felett. Ekkor azt mondjuk, hogy  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  vektorok lineárisan függetlenek, pontosan akkor, ha

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

## Definíció

Bázison egy lineárisan független generátorrendszert értünk.

## Tétel

*Legyen  $V$  vektortér. Ekkor a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vektorok bázist alkotnak a vektortérben, akkor és csak akkor, ha tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektor egyértelműen előáll mint a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vektorok lineáris kombinációja.*

*Ha egy vektortérnek létezik véges elemszámú bázisa, akkor bármely vektorokból is állítok össze bázist, azok elemszáma mindig megegyezik.*

## Definíció

*Legyen  $V$  egy véges bázissal rendelkező vektortér. Ekkor a vektortér dimenzióján a vektortér bázisának elemszámát értjük.*

*Jele:*

$$\dim V.$$

## Tétel

*Legyen  $V$   $n$ -dimenziós vektortér,  $\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n$  bázissal. Legyen továbbá  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor a fenti bázisnak biztosan létezik olyan eleme, amelyre teljesül, hogy a bázisból azt kivéve és a helyére  $\mathbf{v}$ -t írva ismét bázist kapunk.*

- A tétel egyik hasznos következménye, hogy ha egy  $n$ -dimenziós térben találunk  $n$ -db független vektort, akkor az biztosan bázist fog alkotni. Ez azért szerencsés, mert a függetlenség leellenőrzésére sokkal jobb módszereink vannak, mint arra, hogy valami generátorrendszer-e. Hiszen  $\mathbb{R}^n$  téren  $n$  db vektor függetlenségét szeretnénk leellenőrizni, akkor nem kell mást tennünk, mint az általuk képzett mátrix determinánsát vizsgálni.
- Amikor azt akarjuk megvizsgálni, hogy  $n$ -változós,  $n$  egyenletes lineáris egyenletrendszernek egyértelműen létezik-e megoldása, akkor igazából azt vizsgáljuk, hogy a baloldalon álló vektorok bázist alkotnak-e. Az előző pont alapján ehhez elegendő azt megvizsgálni, hogy a vektorok lineárisan függetlenek-e, mert ha igen, akkor tudjuk, hogy a vektorok bázist alkotnak.



## Definíció

Legyen egy vektortéren adott egy  $\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n$  bázis. Ekkor minden  $\mathbf{v} \in V$  vektor egyértelműen előállítható mint

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \mathbf{v}.$$

Ekkor  $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ -t a  $\mathbf{v}$  vektor koordinátáinak hívjuk.

Azt a műveletet, amikor egy bázisból egy elemet kivéve egy másikkal helyettesítjük elemi bázistranszformációnak hívjuk. Ha nem csak egy, hanem több elemet is kicserélünk, akkor pedig bázistranszformációnak. Gyakorlati alkalmazásoknál gyakran felmerül az a kérdés, hogy egy bázistranszformáció során hogyan változnak a vektorok koordinátái. Erre a problémára sok lineáris egyenlet és lineáris programozást megoldó algoritmus is épül.