GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

5. hét

Vektorterek

Lovics Gábor

A lineáris tér fogalma

Vektortér

1. Definíció
Legyen $T = \mathbb{R}$ vagy $T = \mathbb{C}$ halmaz, és legyen T elemein értelmezve az összeadás és a szorzás a szokásos módon (T egy úgynevezett számtest). Ekkor a V halmazt vektortérnek nevezzük a T test felett, ha értelmezve van rajta egy összeadás ($V \times V \to V$) és egy saklárral valós szorzás ($T \times V \to V$), melyek kielégítik a következő $8 = 2 \cdot 4$ axiómát.

2. Definíció (Az összeadás axiómái)
A V halmazon értelmezett összeadás művelet $(+)$ minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-hez hozzárendel egy V-beli elemet.

1. *Az összeadás asszociatív, vagyis bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ esetén*
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$
2. *Az összeadás kommutatív, vagyis bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ esetén*
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$
3. *Létezik nullelem, vagyis olyan $\mathbf{0} \in V$, amellyel minden $\mathbf{v} \in V$ esetén*
$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$
4. *Minden elemnek létezik ellentetje, vagyis minden $\mathbf{v} \in V$ esetén létezik olyan $-\mathbf{v} \in V$, melykre teljesül, hogy*
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

3. Definíció (A skalárral való szorzás axiómái)
A T és a V halmaz között értelmezve van egy skalárral való szorzás művelet, ami minden $\lambda \in T$ és $\mathbf{v} \in V$-hez hozzárendel egy V-beli elemet.

1. *Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén*
$$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}.$$
2. *Bármely $\lambda \in T$ és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ esetén*
$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$
3. *Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén*
$$(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v}).$$
4. *Bármely $\mathbf{v} \in V$-re*
$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Példák vektortérre

Az általunk vizsgált példákban $T = \mathbb{R}$ lesz, vagyis a valós számok feletti vektortereket fogjuk vizsgálni.

1. Az origóból kiinduló sík-, illetve térvektorok, a szokásos vektorműveletekre nézve.
2. Az $\mathbb{R}^n$, ha a műveleteket a szokásos módon komponensenként értelmezzük.
3. A polinomok a rajtuk végzett szokásos műveletekkel.
4. A folytonos függvények halmaza, a szokásos függvényműveletekkel.
5. A deriválható függvények a szokásos függvényműveletekkel.
6. A sorozatok a velük végzett szokásos műveletekkel.

Feladat

Mutassuk meg, hogy a legfeljebb harmadadfokú polinomok vektorteret alkotnak a valós számok felett, a szokásos műveletekkel.

Megoldás

Ahhoz, hogy egy halmazról és a rajta végzett műveletekről belásuk, hogy vektortér, a korábban látott összes axióma teljesülését le kell ellenőriznünk.

1. Legfeljebb harmadfokú polinomok összege legfeljebb harmadfokú polinom.
2. Legfeljebb harmadfokú polinom számszorosa is legfeljebb harmadfokú polinom.
3. Ha p, q és r legfeljebb harmadfokú polinomok, akkor valóban teljesül, hogy $(p + q) + r = p + (q + r)$, hiszen ez általában minden függvényre teljesül.
4. Ha p és q legfeljebb harmadfokú polinomok, akkor valóban teljesül, hogy $p + q = q + p$, hiszen ez általában minden függvényre teljesül.
5. A konstans nulla függvény mint speciális polinom lesz az összeadásra nézve a neutrális elem, hiszen, ha $\mathbf{0}$ a konstans nulla függvényt jelöli, és p egy tetszőleges legfeljebb harmadfokú polinom, akkor $p+\mathbf{0} = p$.
6. Minden p legfeljebb harmadfokú polinomra igaz, hogy van egy olyan q legfeljebb harmadfokú polinom, amelyre $p + q = \mathbf{0}$.
7. Ha $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és p legfeljebb harmadfokú polinom, akkor $(\lambda+\mu)p = \lambda p+\mu p$, hiszen ez minden függvényre teljesül.
8. Ha $\lambda, \in \mathbb{R}$ és p, q legfeljebb harmadfokú polinomok, akkor $\lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q$, hiszen ez minden függvényre teljesül.
9. Ha $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és p legfeljebb harmadfokú polinom, akkor $\lambda(\mu q) = (\lambda\mu)q$, hiszen ez minden függvényre teljesül.
10. Ha p legeljebb harmadfokú polinom, akkor $1p = p$, hiszen ez minden függvényre teljesül.

Láthatjuk, hogy egy ilyen jellegű állításnak a bizonyítása meglehetősen hosszadalmas, pedig a legtöbb része egyszerűen következett a függvények tulajdonságából. A következő nagyon sok tekintetben hasznos fogalom, az ilyan jellegű bizonyításokat is nagymértékben leegyszerűsíti.

Alterek

A lineáris altér

4. Definíció
Legyen V vektortér T felett és $W \subseteq V$. Ekkor W altere V-nek, ha W maga is vektortér T felett, ugyanazokkal a műveletekkel, mint V. Triviális altereknek hívjuk a $W = V$ és $W = \{\mathbf{0}\}$ altereket. Jelölés:

$$W \leq V.$$

1. Tétel
Legyen V vektortér a T felett. Ekkor $W \subseteq V$ altere V-nek pontosan akkor, ha

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W,$$
$$\mathbf{v} \in W, \quad \lambda \in T \Rightarrow \lambda\mathbf{v} \in W.$$

Példák altérre:

1. A síkon az összes origon átmenő egyenes, a térben az összes origon átmenő sík.
2. Legyen V tetszőleges vektortér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ esetén a $\lambda\mathbf{v}$ alakú vektorok alteret alkotnak.
3. A legfeljebb másodfokú polinomok a polinomok között.
4. A polinomok a deriválható függvények között.

Feladat
Ellenőrizzük most le, hogy a legfeljebb harmadfokú polinomok vektorteret alkotnak-e!

Megoldás
Mivel a legfeljebb harmadfokú polinomok részhalmaza a polinomoknak, és mivel utóbbi vektortér, ezért elég azt ellenőrizni, hogy

1. Legfeljebb harmadfokú polinomok összege legfeljebb harmadfokú polinom.
2. Legfeljebb harmadfokú polinom számszorosa is legfeljebb harmadfokú polinom.

Ellenőrizzük le, hogy a harmadfokú polinomok vektorteret alkotnak-e a szokásos függvényműveletekkel!
Megoldás
Itt is elegendő a tételben szereplő két tulajdonságot leellenőrizni, azonban, mivel például $x^3 + (-x^3) = 0$, és a 0 nem harmadfokú polinom, ezért láthatjuk, hogy ez nem vektortér.

Generálás és függetlenség

Generálás

5. Definíció
Legyen V vektortér a T test felett, legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, valamint $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in T$. Ekkor a

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{v}_n$$

kifejezést a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ súlyokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

6. Definíció
Legyenek adva $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ vektorok a V vektortérben. Ekkor a $\mathbf{v}_i$ vektorok által generált halmazon a következő U halmazt értjük:

$$U = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{v}_n \quad \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n \in T\}.$$

Könnyen bizonyítható, hogy a definícióban szereplő U halmaz alteret alkot a V vektortéren, ezért az U-t a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok generált alterének nevezzük. Jelölés:

$$U =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n > .$$

7. Definíció
Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *vektorok olyanok, amelyekre*

$$V =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n >,$$

ekkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *vektorok generátorrendszert alkotnak.*

Generálás esetén mindig csak véges sok vektor lineáris kombinációjáról beszéltünk. Felmerülhet a kérdés, hogy mi történik akkor, ha azt vizsgáljuk, hogy végtelen sok elemet tartalmazó halmaz milyen vektorokat generál. Megtehetjük, de a lineáris kombinációba ilyenkor is tetszőlegesen sok, de csak véges számú vektort vehetünk bele. Végtelen sok vektor lineáris kombinációja esetén még az sem biztosítható ugyanis, hogy az eredmény az eredeti vektortérben legyen. Például vizsgáljuk a valós együtthatós polinomok halmazát mint vektorteret, és benne az $1, x^2, x^3, \ldots$ vektorrendszert. Megmutatható, hogy ezen vektorok végtelen lináris kombinációja lehet például:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Feladat

Mutassuk meg, hogy az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^3$.

Megoldás

Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor előáll mint a fenti vektorok lináris kombinációja, vagyis, hogy léteznek olyan x, y, z valós számok, melyekre:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ez valójában nem más, mint az

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + y &= b \\ x &= c \end{aligned}$$

egyenlet. Ennek pedig biztosan létezik megoldása, mégpedig az $x = c$, $y = b - c$, $z = a - b - c$.

Lineáris függetlenség

8. Definíció
Legyen V *vektortér* T *felett. Ekkor azt mondjuk, hogy* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *vektorok lineárisan függetlenk, pontosan akkor, ha*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

9. Definíció
Bázison egy lineárisan független generátorrendszert értünk.

2. Tétel
Legyen V vektortér. Ekkor a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok bázist alkotnak a vektortérben, akkor és csak akkor, ha tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen előáll mint a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineáris kombinációja. Ha egy vektortérnek létezik véges elemszámú bázisa, akkor bármely vektorokból is állítok össze bázist, azok elemszáma mindig megyegyezik.

10. Definíció
Legyen V egy véges bázissal rendelkező vektortér. Ekkor a vektortér dimenzióján a vektortér bázisának elemszámát értjük. Jele:

$$dim\ V.$$

3. Tétel
Legyen V n-dimenziós vektortér, $\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \ldots; \mathbf{b}_n$ bázissal. Legyen továbbá $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ekkor a fenti bázisnak biztosan létezik olyan eleme, amelyre teljesül, hogy a bázisból azt kivéve és a helyére $\mathbf{v}$-t írva ismét bázist kapunk.

Következmények

- A tétel egyik hasznos következménye, hogy ha egy n-dimenziós térben találunk n-db független vektort, akkor az biztosan bázist fog alkotni. Ez azért szerencsés, mert a függetlenség leellenőrzésére sokkal jobb módszereink vannak, mint arra, hogy valami generátorrendszere-e. Hiszen $\mathbb{R}^n$ téren n db vektor függetlenségét szeretnénk leellenőrizni, akkor nem kell mást tennünk, mint az átaluk képzett mátrix determinánsát vizsgálni.
- Amikor azt akarjuk megvizsgálni, hogy n-változós, n egyenletes lineáris egyenletrendszernek egyértelműen létetzik-e megoldása, akkor igazából azt vizsgáljuk, hogy a baloldalon álló vektorok bázist alkotnak-e. Az előző pont alapján ehhez elegendő azt megvizsgálni, hogy a vektorok lineárisan függetlenek-e, mert ha igen, akkor tudjuk, hogy a vektorok bázist alkotnak.

Koordináták

11. Definíció
Legyen egy vektortéren adott egy $\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \ldots; \mathbf{b}_n$ bázis. Ekkor minden $\mathbf{v} \in V$ vektor egyértelműen előállítható mint

$$\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \mathbf{v}.$$

Ekkor $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$-t a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáinak hívjuk.

Azt a műveletet, amikor egy bázisból egy elemet kivéve egy másikkal helyettesítjük elemi bázistranszformációnak hívjuk. Ha nem csak egy, hanem több elemet is kicserélünk, akkor pedig bázistranszformációnak. Gyakorlati alkalmazásoknál gyakran felmerül az a kérdés, hogy egy bázistranszformáció során hogyan változnak a vektorok koordinátái. Erre a problémára sok lineáris egyenlet és lineáris programozást megoldó algoritmus is épül.