

# GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN





SZÉCHENYI TERV

# GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében  
Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén  
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,  
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,  
és a Balassi Kiadó  
közreműködésével.



Nemzeti Fejlesztési Ügynökség  
[www.ujszechenyiterv.gov.hu](http://www.ujszechenyiterv.gov.hu)  
06 40 638 638



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL



A projekt az Európai Unió  
támogatásával valósul meg.



ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

# Gazdaságmatematika középfaladó szinten

7. hét

SAJÁTÉRTÉKEK, SAJÁTVEKTOROK

Készítette: Lovics Gábor  
Szakmai felelős: Lovics Gábor

1 Motiváció

2 Sajátértékek és sajátvektorok megkeresése

Legyen  $q, b \in \mathbb{R}$  valós számok. Ekkor egy egyváltozós elsőrendű differenciaegyenlet felírható a következő alakban:

$$a_t = qa_{t-1} + b.$$

Ez a feladat még könnyen megoldható, ha adott  $a_0$  kezdőpont. Ekkor a megoldás:

$$a_t = q^t \left( a_0 - \frac{b}{1-q} \right) + \frac{b}{1-q}.$$

Nem nehéz végiggondolni azt sem, hogy a feladat stacionárius pontja  $x^* = \frac{b}{1-q}$ , és azt sem, hogy ha a  $|q| < 1$ , akkor a sorozat a stacionárius pontjához konvergál. Ilyenkor magát a sorozatot is (aszimptotikusan) stacionáriusnak nevezzük.

# Magasabbrendű differenciaegyenletek

7. hét

Lovics

Egy magasabbrendű differenciaegyenlet a következő alakban írható fel:

$$a_t = q_1 a_{t-1} + q_2 a_{t-2} + \dots + q_k a_{t-k} + b.$$

Kérdés, hogy ennek a feladatnak a megoldása mikor stacionárius. Először azt mutatjuk meg, hogy egy magasabbrendű differenciaegyenlet visszavezethető minden esetben egy többváltozós elsőrendű differenciaegyenletté. Vizsgáljunk első lépésben egy másodrendű egyenletet:

$$a_t = q_1 a_{t-1} + q_2 a_{t-2} + b.$$

Vezessük be az  $\alpha_t = a_{t-1}$  jelölést. Ekkor a feladat a következő formára írható át:

$$a_t = q_1 a_{t-1} + q_2 \alpha_{t-1} + b$$

$$\alpha_t = a_{t-1}.$$

Motiváció

Sajátértékek és sajátvektorok megkeresése

# Magasabbrendű differenciaegyenletek (folyt.)

7. hét

Lovics

Ez az összefüggés mátrixos alakba átírva

$$\begin{pmatrix} a_t \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ \alpha_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eredeti feladat tehát a következő alakban írható át:

$$\begin{pmatrix} a_t^{(0)} \\ a_t^{(1)} \\ \vdots \\ a_t^{(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_{k-1} & q_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1}^{(0)} \\ a_{t-1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{t-1}^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezért általánosságban nem magasabbrendű, hanem többváltozós elsőrendű differenciaegyenletről szoktunk beszélni.

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Ekkor a differenciaegyenlet a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{b}.$$

Motiváció

Sajátértékek és sajátvektorok megkeresése



# Egy speciális eset

A célunk, hogy egy többváltozós elsőrendű differenciaegyenletről eldöntsük, hogy stacionárus-e vagy sem. Egy speciális esetben ez meglehetősen egyszerű. Vizsgáljuk meg például a következő egyenlet stacionaritását:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Ebben a példában a kétváltozós differenciaegyenlet két egyváltozós differenciaegyenletté esik szét. A két egyváltozós differenciaegyenletről pedig már tudjuk, hogy mikor stacionáriusak. Mivel  $|-1| = 1$  és  $|-5| > 1$ , ezért a példában szereplő differenciaegyenlet nem stacionárius. Most vizsgáljuk meg, hogy stacionárus-e a következő differenciaegyenlet:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 2 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

# Áttérés másik bázisra

7. hét

Lovics

Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy stacionárius-e a sorozat, elegendő a

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

mátrixot vizsgálunk. Korábban láttuk, hogy a mátrix értelmezhető mint egy lineáris leképezés,  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Azt is láttuk, hogy a mátrix oszlopai nem mások, mint a bázis, vagyis az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

és a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  vektorok képei. Azt is megbeszéltük, hogy ha áttérünk egy másik bázisra, akkor a leképezés mátrixa is megváltozik. Kérdés, hogy a bázis változtatásával el lehet-e érni, hogy leolvasható legyen a stacionaritás.

Térjünk át például a  $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  bázisra, és vizsgáljuk meg, hogy hogyan hat ez a mátrixunkra! Ehhez megvizsgáljuk, hogy mik lesznek az új bázis képei, majd a képeket felírjuk az új bázisban.

Motiváció

Sajátértékek és sajátvektorok megkeresése

## Áttérés másik bázisra (folyt.)

Az új bázis első elemének a képe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Az új bázis első elemének a képe felírva az új bázisban:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az új bázis második elemének a képe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Az új bázis második elemének a képe felírva az új bázisban:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Motiváció

Sajátértékek és sajátvektorok megkeresése

# Áttérés másik bázisra (folyt.)

7. hét

Lovics

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése

Vagyis az új bázisban felírva az eredeti lineáris leképezés mátrixát a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

amiről már korábban megmutattuk, hogy egy nem stacionárius sorozatot definiál. Már csak az a kérdés, hogy hogyan találjuk meg a végtelen sok lehetséges új bázis közül éppen, azt amelyekre áttérve leolvashatóvá válik a stacionaritás.

# A sajátérték, sajátvektor probléma

7. hét

Lovics

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése

Gondoljuk végig, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeztek az új bázis vektorai, ami miatt alkalmasak voltak a diagonalizációra. A diagonális mátrixunk első oszlopának csak az első eleme különbözhet 0-tól, az összes többi 0 kell legyen. Ez azt jelenti, hogy az új bázisban az első vektor képe úgy kell előálljon, mint valahányszor az első vektor (és 0-szor az összes többi). Ugyanez a gondolatmenet nyilván az összes többi oszloppal is végigjátszható. Tehát az új bázis vektorai úgy fognak előállni, mint az

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

egyenlet egy megoldása, ahol  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  adott mátrix  $\lambda \in \mathbb{R}$ , és  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a feladat változó. Ezt a feladatot szokás sajátérték, sajátvektor problémának nevezni. A feladat triviális megoldása  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ami viszont nyilván nem lehet eleme egyetlen bázisnak sem, ezért igazából arra vagyunk kíváncsiak, hogy a sajátérték, sajátvektor problémának létezik-e a  $\mathbf{0}$ -tól különböző megoldása.

## Definíció

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  adott mátrix. Akkor a mátrixhoz tartozó sajátérték, sajátvektor probléma:

$$Ax = \lambda x$$

alakú.

A feladatot megoldó  $\lambda$ -kat a mátrix sajátértékeinek és a hozzájuk tartozó  $x \neq 0$  vektorokat a mátrix sajátvektorainak nevezzük.

# A feladat megoldásai

7. hét

Lovics

Álakítsuk át a sajátérték, sajátvektor problémát a következő módon:

$$\begin{aligned}Ax &= \lambda x \\Ax - \lambda x &= \mathbf{0} \\(A - \lambda I)x &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Így a feladat adott  $\lambda$  esetén egy homogén lineáris egyenletté egyszerűsödik, melynek  $x = \mathbf{0}$  továbbra is triviális megoldása. Kérdés, hogy mikor van ezen kívül más megoldása is. Emlékezzünk vissza, hogy egy  $n \times n$ -es feladatnak akkor nem egyértelmű a megoldása, ha a bal oldalon álló mátrix determinánsa 0. Nézzük meg a korábbi példákban, hogy ez mit jelent:

$$\begin{aligned}\left| \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -7 \\ 3 & -8-\lambda \end{pmatrix} \right| = \\&= (2-\lambda)(-8-\lambda) + 21 = \lambda^2 + 6\lambda + 5.\end{aligned}$$

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése

## Definíció

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix. Ekkor a mátrix karakterisztikus polinomján az

$$|A - \lambda I|$$

determinánst értjük.

Egy mátrix sajátértékeinek megkeresése tehát nem más, mint a mátrix karakterisztikus polinomja gyökeinek a megkeresése. A példánk alapján tehát a sajátértékek a következők:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}.$$

Ezzel meghatároztuk a mátrix sajátértékeit. Ezután már csak a dolgunk, hogy a sajátértékhez megtaláljuk a sajátvektorokat. Ezt pedig már egy egyszerű lineáris egyenletrendszer megoldásával találhatjuk meg.



# A karakterisztikus polinom (folyt.)

7. hét

Lovics

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése

Először  $\lambda = -1$  helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$3x_1 - 7x_2 = 0$$

$$3x_1 - 7x_2 = 0.$$

Ennek a feladatnak a megoldása például a  $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$  vektor.

Másodszor nézzük meg a  $\lambda = -5$  helyettesítést. Ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$7x_1 - 7x_2 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0,$$

aminek megoldása az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vektor.

# Szemléltetés a sajátvektorokról

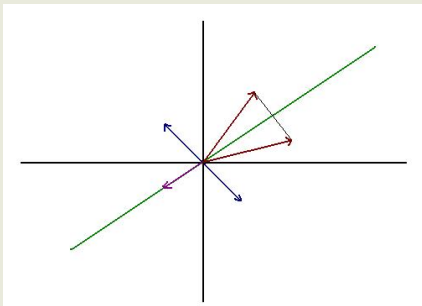
7. hét

Lovics

Ahhoz, hogy a sajátértékek jelentését jobban megértsük, nézzünk meg néhány olyan  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris függvényt, amely geometriailag jól szemléltethető. Lineáris leképezés például, ha egy origón átmenő egyenesre tükrözzük a vektorokat. Ekkor az egyenesen lévő vektorok az 1-hez mint sajátértékhez tartozó sajátvektorok, az origón átmenő, az eredeti egyenesre merőleges vektorok pedig a  $-1$ -hez tartozó sajátvektorok.

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése



# Szemléltetés a sajátvektorokról (folyt.)

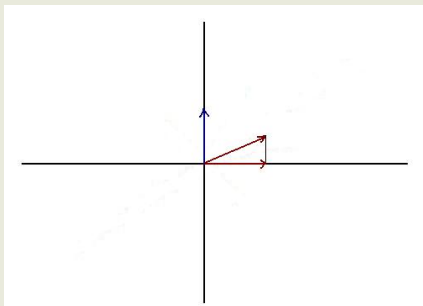
7. hét

Lovics

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése

Most vizsgáljuk meg, mi történik akkor, amikor az  $x$  tengelyre merőlegesen levetítjük a sík vektorait. Ekkor az  $x$  tengelyen lévő vektorok az 1-hez mint sajátértékhez tartozó sajátvektorok. Az  $y$  tengelyen lévő vektorok pedig a 0-hoz tartozó sajátvektorok. Az ábrán az is látszik, hogy a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok éppen a leképzés magterét alkotják.



# Szemléltetés a sajátvektorokról (folyt.)

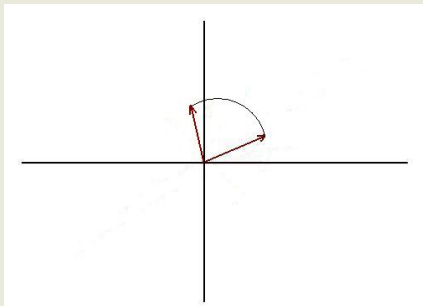
7. hét

Lovics

Most nézzük meg, hogy mit mondhatunk akkor, amikor a sík vektorait egy adott szöggel elforgatjuk az origó körül. Ez egy olyan lineáris leképezés, melynek nincsenek sajátvektorai, ezért valós sajátértékei sincsenek. A valós sajátértékek nem létezéséből azonban nem következtethetünk arra, hogy a leképezés nem invertálható, hiszen a forgatás inverz leképezése az ellenkező irányba való forgatás.

Motiváció

Sajátértékek és  
sajátvektorok  
megkeresése



Már csak az a kérdés, hogy mi a feltétele annak, hogy diagonalizálható legyen egy mátrix. A karakterisztikus polinom mindig  $n$ -ed fokú. Ha ennek  $n$  db gyöke van, akkor végig tudjuk csinálni a fenti eljárást. Ezt a valós számok halmazán nem, de a komplex számok halmazán mindig meg tudjuk tenni. Tehát amennyiben vizsgálódásainkat kiterjesztjük a komplex számok halmazára, akkor mindig találunk  $n$  db sajátértéket, és így mindig diagonalizálható a mátrix.