GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

A projekt az Európai Unió támogatásával valósul meg.

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

7. hét

Sajátértékek, sajátvektorok

Lovics Gábor

Motiváció

Emlékeztető

Legyen $q, b \in \mathbb{R}$ valós számok. Ekkor egy egyváltozós elsőrendű differenciaegyenlet felírható a következő alakban:

$$a_t = qa_{t-1} + b.$$

Ez a feladat még könnyen megoldható, ha adott a_0 kezdőpont. Ekkor a megoldás:

$$a_t = q^t \left(a_0 - \frac{b}{1-q}\right) + \frac{b}{1-q}.$$

Nem nehéz végiggondolni azt sem, hogy a feladat stacionárius pontja $x^* = \frac{b}{1-q}$, és azt sem, hogy ha a $|q| < 1$, akkor a sorozat a stacionárius pontjához konvergál. Ilyenkor magát a sorozatot is (aszimptotikusan) stacionáriusnak nevezzük.

Magasabbrendű differenciaegyenletek

Egy magasabbendű differneciaegyenlet a következő alakban írható fel:

$$a_t = q_1 a_{t-1} + q_2 a_{t-2} + \cdots + q_k a_{t-k} + b.$$

Kérdés, hogy ennek a feladatnak a megoldása mikor stacionárius. Először azt mutatjuk meg, hogy egy magasabbrendű differenciaegyenlet visszavezethető minden esetben egy többváltozós elsőrendű differencia-egyenletté. Vizsgáljunk első lépésben egy másodrendű egyenletet:

$$a_t = q_1 a_{t-1} + q_2 a_{t-2} + b.$$

Vezzesük be az $\alpha_t = a_{t-1}$ jelölést. Ekkor a feladat a következő formára írható át:

$$\begin{aligned} a_t &= q_1 a_{t-1} + q_2 \alpha_{t-1} + b \\ \alpha_t &= a_{t-1}. \end{aligned}$$

Ez az összefüggés mátrixos alakba átírva

$$\begin{pmatrix} a_t \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ \alpha_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eredeti feladat tehát a következő alakban írható át:

$$\begin{pmatrix} a_t^{(0)} \\ a_t^{(1)} \\ \vdots \\ a_t^{(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_{k-1} & q_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1}^{(0)} \\ a_{t-1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{t-1}^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ezért általánosságban nem magasabbrendű, hanem többváltozós elsőrendű differnciaegyenletről szoktunk beszélni. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a differenciaegyenlet a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{b}.$$

Egy speciális eset

A célunk, hogy egy többváltozós elsőrendű differenciaegyenletről eldöntsük, hogy stacionárus-e vagy sem. Egy speciális esetben ez meglehetősen egyszerű. Vizsgáljuk meg például a következő egyenlet stacionaritását:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Ebben a példában a kétváltozós differenciaegyenlet két egyváltozós differenciaegyenletté esik szét. A két egyváltozós differenciaegyenletről pedig már tudjuk, hogy mikor stacionáriusak. Mivel $|-1| = 1$ és $|-5| > 1$, ezért a példában szereplő differenciaegyenlet nem stacionárius. Most vizsgáljuk meg, hogy stacionárius-e a következő differenciaegyenlet:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Áttérés másik bázisra

Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy stacionárius-e a sorozat, elegendő a

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

mátrixot vizsgálnunk. Korábban láttuk, hogy a mátrix értelmezhető mint egy lineáris leképzés, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Azt is láttuk, hogy a mátrix oszlopai nem mások, mint a bázis, vagyis az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok képei. Azt is megbeszéltük, hogy ha áttérünk egy másik bázisra, akkor a leképezés mátrixa is megváltozik. Kérdés, hogy a bázis változtatásával el lehet-e érni, hogy leolvasható legyen a stacionaritás. Térjünk át például a $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisra, és vizsgáljuk meg, hogy hogyan hat ez a mátrixunkra! Ehhez megvizsgáljuk, hogy mik leszenk az új bázis képei, majd a képeket felírjuk az új bázisban. Az új bázis első elemének a képe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Az új bázis első elemének a képe felírva az új bázisban:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az új bázis második elemének a képe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Az új bázis második elemének a képe felírva az új bázisban:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vagyis az új bázisban felírva az eredeti lineáris leképzés mátrixát a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

amiről már korábban megmutattuk, hogy egy nem stacionárius sorozatot definiál. Már csak az a kérdés, hogy hogyan találjuk meg a végtelen sok lehetséges új bázis közül éppen, azt amelyikre áttérve leolvashatóvá válik a stacionaritás.

Sajátértékek és sajátvektorok megkeresése

A sajátérték, sajátvektor probléma

Gondoljuk végig, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeztek az új bázis vektorai, ami miatt alkalmasak voltak a diagonalizációra. A diagonális mátrixunk első oszlopának csak az első eleme különbözhet 0-tól, az összes többi 0 kell legyen. Ez azt jelenti, hogy az új bázisban az első vektor képe úgy kell előálljon, mint valahányszor az első vektor (és 0-szor az összes többi). Ugyanez a gondolatmenet nyilván az összes többi oszloppal is végigjátszható. Tehát az új bázis vektorai úgy fognak előállni, mint az

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

egyenlet egy megoldása, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adott mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$, és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a feladat változói. Ezt a feladatot szokás sajátérték, sajátvektor problémának nevezni. A feladat triviális megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ami viszont nyílván nem lehet eleme egyetlen bázisnak sem, ezért igazából arra vagyunk kiváncsiak, hogy a sajátérték, sajátvektor problémának létezik-e a $\mathbf{0}$-tól különböző megoldása.

Sajátérték és sajátvektor

1. Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adott mátrix. Akkor a mátrixhoz tartozó sajátérték, sajátvektor probléma:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

alakú. A feladatot megoldó λ-kat a mátrix sajátértékeinek és a hozzájuk tartozó $\mathbf{x} \neq 0$ vektorokat a mátrix sajátvektorainak nevezzük.

A feladat megoldásai

Alakítsuk át a sajátérték, sajátvektor problémát a következő módon:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)\mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Így a feladat adott λ esetén egy homogén lineáris egyenletté egyszerűsödik, melynek $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ továbbra is triviális megoldása. Kérdés, hogy mikor van ezen kívül más megoldása is. Emlékezzünk vissza, hogy egy $n \times n$-es feladatnak akkor nem egyértelmű a megoldása, ha a bal oldalon álló mátrix determinánsa 0. Nézzük meg a korábbi példákban, hogy ez mit jelent:

$$\begin{aligned} &\left| \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -7 \\ 3 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \\ =&(2-\lambda)(-8-\lambda) + 21 = \lambda^2 + 6\lambda + 5. \end{aligned}$$

A karakterisztikus polinom

2. Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix. Ekkor a mátrix karakterisztikus polinomján az

$$|A - \lambda I|$$

determinánst értjük.

Egy mátrix sajátértékeinek megkeresése tehát nem más, mint a mátrix karakterisztikus polinomja gyökeinek a megkeresése. A példánk alapján tehát a sajátértékek a következők:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}.$$

Ezzel meghatároztuk a mátrix sajátértékeit. Ezután már csak az a dolgunk, hogy a sajátértékhez megtaláljuk a sajátvektorokat. Ezt pedig már egy egyszerű lineáris egyenletrendszer megoldásával találhatjuk meg. Először $\lambda = -1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 7x_2 &= 0. \end{aligned}$$

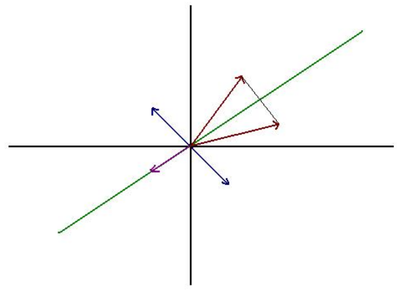
Ennek a feladatnak a megoldása például a $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor. Másodszor nézzük meg a $\lambda = -5$ helyettesítést. Ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 7x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 0, \end{aligned}$$

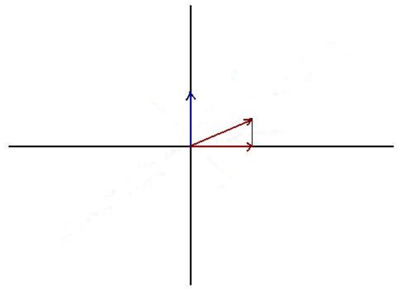
aminek megoldása az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor.

Szemléltetés a sajátvektorokról

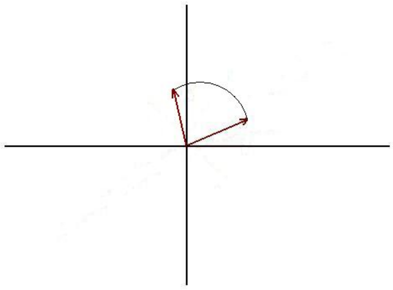
Ahhoz, hogy a sajátértékek jelentését jobban megértsük, nézzünk meg néhány olyan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris függvényt, amely geometriailag jól szemléltethető. Lineáris leképzés például, ha egy origón átmenő egyenesre tükrözzük a vektorokat. Ekkor az egyenesen lévő vektorok az 1-hez mint sajátértékhez tartozó sajátvektorok, az origón átmenő, az erdeti egyenesre merőleges vektorok pedig a -1-hez tartozó sajátvektorok.



Most vizsgáljuk meg, mi történik akkor, amikor az x tengelyre merőlegesen levetítjük a sík vektorait. Ekkor az x tengelyen lévő vektorok az 1-hez mint sajátértékhez tartozó sajátvektorok. Az y tengelyen lévő vektorok pedig a 0-hoz tartozó sajátvektorok. Az ábrán az is látszik, hogy a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok éppen a leképzés magterét alkotják.



Most nézzük meg, hogy mit mondhatunk akkor, amikor a sík vektorait egy adott szöggel elforgatjuk az origó körül. Ez egy olyan lineáris leképzés, melynek nincsenek sajátvektorai, ezért valós sajátértékei sincsenek. A valós sajátértékek nem létezéséből azonban nem következtethetünk arra, hogy a leképzés nem invertálható, hiszen a forgatás inverz leképzése az ellenkező irányba való forgatás.



Megoldhatóság

Már csak az a kérdés, hogy mi a feltétele annak, hogy diagonalizálható legyen egy mátrix. A karakterisztikus polinom mindig n-ed fokú. Ha ennek n db gyöke van, akkor végig tudjuk csinálni a fenti eljárást. Ezt a valós számok halmazán nem, de a komplex számok halmazán mindig meg tudjuk tenni. Tehát amennyiben vizsgálódásainkat kiterjesztjük a komplex számok halmazára, akkor mindig találunk n db sajátértéket, és így mindig diagonalizálható a mátrix.