

GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN





SZÉCHENYI TERV

GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TátK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék,
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet,
és a Balassi Kiadó
közreműködésével.



Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL



A projekt az Európai Unió
támogatásával valósul meg.



ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középfaladó szinten

8. hét
ANALÍZIS

Készítette: Lovics Gábor
Szakmai felelős: Lovics Gábor

- 1 Halmazok
 - o Alapfogalmak
 - o Az infimum és a szuprémum

- 2 Sorozatok

- 3 Deriválás és integrálás

- Természetes számok halmaza: \mathbb{N} .
- Természetes számok halmaza nullával kiegészülve: \mathbb{N}_0 .
- Egész számok halmaza: \mathbb{Z} .
- Racionális számok halmaza: \mathbb{Q} .
- Valós számok halmaza: \mathbb{R} .
- Pozitív, negatív valós számok halmaza: \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_- .
- Nem negatív, illetve nem pozitív valós számok halmaza: \mathbb{R}_\oplus , \mathbb{R}_\ominus .
- Üres halmaz: \emptyset .

- Eleme: \in . Például: $3 \in \mathbb{Z}$.
- Nem eleme: \notin . Például: $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- Valódi része, valódi részhalmaza: \subset vagy \subsetneq . Része, részhalmaza: \subseteq .
Például: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.
- Létezik: \exists . Tagadása: nem létezik, \nexists ; vagy mindegyikre hamis.
 - Állítás: Létezik lila fa.
 - Tagadás: Nem létezik lila fa.
 - Tagadás: Mindegyik fára igaz, hogy nem lila.
- Minden: \forall . Tagadása: létezik, hogy nem igaz.
 - Állítás: Minden fa zöld.
 - Tagadás: Létezik olyan fa, amelyik nem zöld.
 - Rossz tagadás: Nem létezik zöld fa.

- Halmazokat $\{ \}$ zárójelekkel adunk meg, és általában nagybetűvel jelöljük.
- Elemek felsorolásával: $S = \{6; 22; 47\}$.
- Legtöbbször a következő formát használjuk:
 $S = \{\text{általános elem: definiáló tulajdonságok}\}$.
 - Például páros számok halmaza: $P = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.
 - Irracionális számok halmaza: $\mathbb{Q}^* = \{x : x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$.
 - Egy origó középpontú, 5 egység sugarú körön lévő pontok halmaza: $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$.
- Intervallumok megadása. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ekkor
 - $(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$,
 - $[a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$,
 - $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$,
 - $[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.

Definíció

Egészítsük ki a valós számok halmazát a mínusz és plusz végtelennel. Az így kapott halmazt nevezzük kibővített valós számok halmazának.

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

Definíció

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. A H halmazt felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan $f \in \mathbb{R}$, amire teljesül, hogy $h \leq f$, minden $h \in H$ -ra. Az ilyen tulajdonággal bíró $f \in \bar{\mathbb{R}}$ értéket a H halmaz felső korlátjának nevezzük.

Hasonlóan a H halmazt alulról korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $a \leq h$, minden $h \in H$ -ra. Az ilyen tulajdonággal bíró $a \in \bar{\mathbb{R}}$ értéket a H halmaz alsó korlátjának nevezzük. A H halmazt korlátosnak nevezzük, ha alulról is és felülről is korlátos.

Alsó és felső határ (folyt.)

A valós számokon definiált részhalmazokról általában nem mondható el, hogy létezik legnagyobb, illetve legkisebb elemük. A következő egyszerű állítás mégis igaz.

Tétel

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, és jelölje $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ a H halmaz alsó korlátainak halmazát, $F \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ pedig a felső korlátainak halmazát. Ekkor az A halmaznak létezik legnagyobb, az F halmaznak pedig létezik legkisebb eleme.

A tétel alapján pedig értelmes a következő definíció.

Definíció

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, és jelölje megint A az alsó, F pedig a felső korlátok halmazát. Ekkor a H halmaz alsó határán vagy infimumán az A halmaz legnagyobb elemét értjük. Jele: $\inf H$.

A H halmaz felső határán vagy szuprémumán pedig az F halmaz legkisebb elemét értjük. Jele $\sup H$.

Példák infimumra és szuprémumra

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaz. Ha a halmaz korlátos, akkor mind a szuprémuma mind az infimuma valós szám. Ha a halmaz nem üres, és felülről nem korlátos, akkor a szuprémuma ∞ . Hasonlóan, ha nem üres, és aluról nem korlátos, akkor az infimuma $-\infty$. Első ránézésre logikusnak látszik, hogy egy halmaz szuprémuma sosem kisebb, mint az infimuma. Azonban gondoljuk végig mit mond a definíció, ha a halmaz üres. Az üres halmaz esetén minden számra teljesül, hogy nagyobb vagy egyenlő, mint a halmaz összes eleme, vagyis az üres halmaznak minden szám felső korlátja. A felső korlátok közül a legkisebb pedig a $-\infty$ lesz. Vagyis az üres halmaz szuprémuma $-\infty$. Hasonlóan az is teljesül minden valós számra, hogy kisebb vagy egyenlő, mint a halmazban lévő elemek. Így a az üres halmaz infimuma ∞ .

Példák infimumra és szuprémumra (folyt.)

Ezt a speciális esetet leszámítva az infimum és a szuprémum valójában nem más, mint a halmaz minimumának és maximumának általánosítása, utóbbiak ugyanis nem mindig léteznek. Vizsgáljuk meg, a korlátos intervallum esetét. Legyen $A = (a, b]$. Ekkor a halmaznak maximuma b , minimuma viszont nem létezik. Az a nem a halmaz minimuma, mert az a nem eleme a halmaznak. Ezzel szemben az a infimuma az A halmaznak.

Definíció

Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor a (b_n) -t az (a_n) részsorozatának tekintjük, ha létezik olyan $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő függvény, melyre

$$b_n = a_{f(n)}.$$

Legyen például $a_n = \frac{1}{n}$, ekkor a $b_n = \frac{1}{2n}$ az a_n részsorozata, az $f(n) = 2n$ választással. Hasonlóan részsorozat a $c_n = \frac{1}{n^2}$, az $f(n) = n^2$ választással.

Tétel

Legyen (a_n) olyan valós sorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ahol $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Tegyük fel továbbá, hogy (b_n) részsorozata (a_n) -nek. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Halmazok

Alapfogalmak

Az infimum és a szuprénum

Sorozatok

Deriválás és integrálás

Ismeretes, hogy az Euler-féle e szám nem más, mint az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat határértéke, ha n tart végtelenbe. Az előző tétel alapján tudjuk, hogy az $(1 + \frac{1}{2n})^{2n}$ sorozat határértéke is e . Mindezek alapján, ha például $(\frac{n+\frac{1}{3}}{n})^n$ sorozat határértékére vagyunk kíváncsiak, akkor a következő átalakításokat végezzük:

$$\left(\frac{n + \frac{1}{3}}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} \rightarrow e^{\frac{1}{3}}.$$

Részsorozatok határértéke

Korábban láttuk, hogy nem minden sorozatnak létezik határértéke. Nézzük például a következő sorozatot:

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{ha } n = 2k \quad k \in \mathbb{N} \\ 6 + \frac{1}{n} & \text{ha } n = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Ennek a sorozatnak nincs határértéke. Egyértelmű az is azonban, hogy van olyan részsorozata, amelyik 1-hez és olyan is, amelyik 6-hoz tart.

Definíció

Legyen a_n tetszőleges sorozat, és vegyük ennek a sorozatnak az összes részsorozatát. A részsorozatok határértékei közül a legkisebbet a sorozat limesz inferiorjának, a legnagyobbat pedig a limesz superiorjának nevezzük. A fenti fogalmak jelölése rendre:

$$\liminf a_n; \quad \limsup a_n.$$

Tétel

Legyen a_n tetszőleges számsorozat. Ekkor a sorozatnak egyértelműen létezik a limesz inferiorja és a limesz superiorja. Egy sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke, ha a sorozat limesz inferiorja és a limesz superiorja megegyezik, és ekkor

$$\lim a_n = \lim \inf a_n = \lim \sup a_n.$$

A limesz inferior és superior fogalma inkább elméleti, mint gyakorlati jelentőségű. Egyes tételek általánosabban is megfogalmazhatók ezekkel a fogalmakkal, hiszen ekkor tetszőleges sorozatra igaz lehet az állítás, és nem kell megkövetelni, hogy létezzen a sorozatnak határértéke. A gyakorlatban általában ezeket a tételeket olyan sorozatokra alkalmazzuk, amelyeknek létezik határértéke, és az utolsó tételünk alapján ilyenkor elegendő ezt a határértéket megkereseni.

Deriválási szabályok

Ahhoz, hogy az összes deriválási szabályt áttekinthessük, először is be kell vezetnünk néhány új függvényt. Ezeket a függvényeket hiperbólikus függvényeknek nevezzük.

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$$

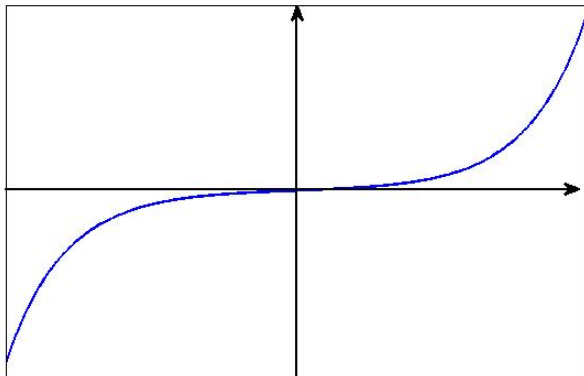
$$\operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$$

A hiperbólikus függvények sok szempontból hasonlítanak a trigonometrikus függvényekre. Ahogy a trigonometrikus függvények esetében, úgy ezen függvényeknek is érdemes definiálni az inverzet, amik rendre:

$\operatorname{arsh}x \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\operatorname{arch}x [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $\operatorname{arth}x (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények.

Deriválási szabályok (folyt.)

A $\sinh x$



8. hét

Lovics

Halmazok

Alapfogalmak

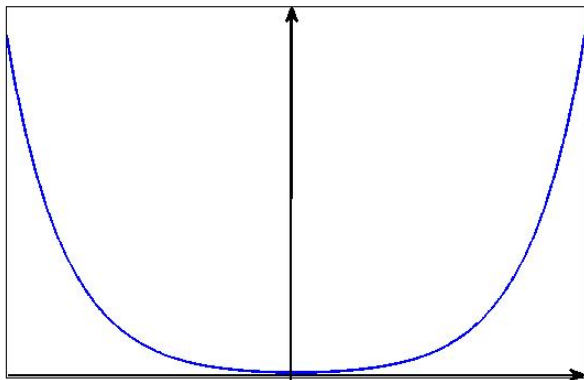
Az infimum és a
szuprémum

Sorozatok

Deriválás és
integrálás

Deriválási szabályok (folyt.)

A chx



8. hét

Lovics

Halmazok

Alapfogalmak

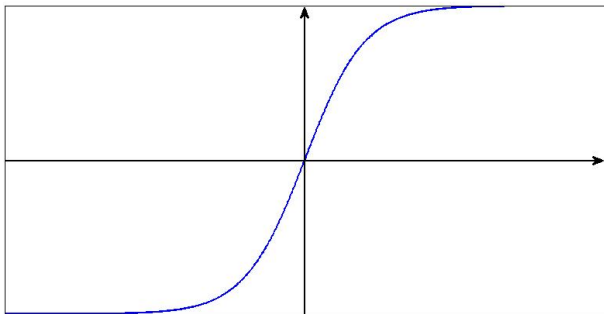
Az infimum és a
szuprémum

Sorozatok

Deriválás és
integrálás

Deriválási szabályok (folyt.)

A \tanh



8. hét

Lovics

Halmazok

Alapfogalmak

Az infimum és a
szuprémum

Sorozatok

Deriválás és
integrálás

Deriválási szabályok (folyt.)

Függvények deriváltjai:

- $[x^a]' = ax^{a-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
- $[e^x]' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$
- $[a^x]' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$
- $[\sin x]' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\cos x]' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $k\pi \neq x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $[\operatorname{ctg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{\pi}{2}k\pi \neq x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{arcctg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{sh} x]' = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$

Deriválási szabályok (folyt.)

- $[\operatorname{ch}x]' = \operatorname{sh}x, x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{th}x]' = 1 - \operatorname{th}^2x, x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{cth}x]' = 1 - \operatorname{cth}^2x, 0 \neq x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{arsh}x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x \in \mathbb{R}$
- $[\operatorname{arth}x]' = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1; 1)$

8. hét

Lovics

Halmazok

Alapfogalmak

Az infimum és a
szuprémum

Sorozatok

Deriválás és
integrálás

Deriválási szabályok (folyt.)

8. hét

Lovics

Deriválás és műveletek:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

Halmazok

Alapfogalmak

Az infimum és a szuprémum

Sorozatok

Deriválás és integrálás

Speciális esetben:

- $[(g(x))^a]' = ag(x)^{a-1}g'(x); a \in \mathbb{R}$
- $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x)$
- $[\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)}; g(x) > 0$

Integrálási szabályok

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (x > 0, -1 \neq \alpha \in \mathbb{R})$
- $\int e^x dx = e^x + c \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\int x^x dx = \frac{x^x}{\ln a} + c \quad (x \in \mathbb{R}, 1 \neq a > 0)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (x > 0 \text{ vagy } x < 0)$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\int \cos x dx = \sin x + c \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c \quad (k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z})$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c \quad (k\pi \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \quad (-1 < x < 1)$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsh} x + c \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c =$
$$= \begin{cases} \operatorname{arch} x + c & (1 < x \in \mathbb{R}) \\ -\operatorname{arch}(-x) + c & (1 > x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c \quad (x \in \mathbb{R})$

Integrálási szabályok (folyt.)

- $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c = \begin{cases} \operatorname{arcthx} + c & (1 > |x| \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{arccthx} + c & (1 > |x| \in \mathbb{R}) \end{cases}$
- $\int \operatorname{sh}x dx = \operatorname{ch}x + c \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\int \operatorname{ch}x dx = \operatorname{sh}x + c \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2_x} dx = -\operatorname{cth}x + c \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2_x} dx = \operatorname{th}x + c \quad (x \in \mathbb{R})$

Integrálási szabályok (folyt.)

8. hét

Lovics

Halmazok

Alapfogalmak

Az infimum és a
szuprémum

Sorozatok

Deriválás és
integrálás

Integrálás és műveletek:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$
- $\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$
- $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du; u = g(x)$