GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

8. hét

Analízis

Lovics Gábor

Halmazok

Alapfogalmak

Nevezetes halmazok

- Természetes számok halmaza: $\mathbb{N}$.
- Természetes számok halmaza nullával kiegészülve: $\mathbb{N}_0$.
- Egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.
- Racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
- Valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
- Pozitív, negatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$.
- Nem negatív, illetve nem pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_\oplus$, $\mathbb{R}_\ominus$.
- Üres halmaz: $\emptyset$.

Jelölések

- Eleme: $\in$. Például: $3 \in \mathbb{Z}$.
- Nem eleme: $\notin$. Például: $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- Valódi része, valódi részhalmaza: $\subset$ vagy $\subsetneq$. Része, részhalmaza:$\subseteq$. Például: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.
- Létezik: $\exists$. Tagadása: nem létezik, $\nexists$; vagy mindegyikre hamis.
  - Állítás: Létezik lila fa.
  - Tagadás: Nem létezik lila fa.
  - Tagadás: Mindegyik fára igaz, hogy nem lila.
- Minden: $\forall$. Tagadása: létezik, hogy nem igaz.
  - Állítás: Minden fa zöld.
  - Tagadás: Létezik olyan fa, amelyik nem zöld.
  - Rossz tagadás: Nem létezik zöld fa.

Halmazok formális definíciói

- Halmazokat { } zárójelekkel adunk meg, és általában nagybetűvel jelöljük.
- Elemek felsorolásával: $S = \{6; 22; 47\}$.
- Legtöbbször a következő formát használjuk: $S = \{$általános elem: definiáló tulajdonságok$\}$.
  - Például páros számok halmaza: $P = \{n : n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
  - Irracionális számok halmaza: $\mathbb{Q}^* = \{x : x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q}\}$.
  - Egy origó középpontú, 5 egység sugarú körön lévő pontok halmaza: $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$.
- Intervallumok megadása. Legyenek $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Ekkor
  - $(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,
  - $[a, b) = \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$,
  - $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$,
  - $[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$.

Az infimum és a szuprémum

Alsó és felső határ

1. Definíció
Egészítsük ki a valós számok halmazát a minusz és plusz végtelennel. Az így kapott halmazt nevezzük kibővített valós számok halmazának.

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$$

2. Definíció
Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. A H halmazt felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan $f \in \mathbb{R}$, amire teljesül, hogy $h \leq f$, minden $h \in H$-ra. Az ilyen tulajdonággal bíró $f \in \bar{\mathbb{R}}$ értéket a H halmaz felső korlátjának nevezzük. Hasonlóan a H halmazt alulról korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $a \leq h$, minden $h \in H$-ra. Az ilyen tulajdonággal bíró $a \in \bar{\mathbb{R}}$ értéket a H halmaz alsó korlátjának nevezzük. A H halmazt korlátosnak nevezzük, ha alulról is és felülről is korlátos.

A valós számokon definiált részhalmazakról általában nem mondható el, hogy létezik legnagyobb, illetve legkisebb elemük. A következő egyszerű állítás mégis igaz.

1. Tétel
Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, és jelölje $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ a H halmaz alsó korlátainak halmazát, $F \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ pedig a felső korlátainak halmazát. Ekkor az A halmaznak létezik legnagyobb, az F halmaznak pedig létezik legkisebb eleme.

A tétel alapján pedig értelmes a következő definíció.

3. Definíció
Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, és jelőlje megint A az alsó, F pedig a felső korlátok halmazát. Ekkor a H halmaz alsó határán vagy infimumán az A halmaz legnagyobb elemét értjük. Jele: $\inf H$. *A H halmaz felső határán vagy szuprémumán pedig az F halmaz legkisebb elemét értjük. Jele* $\sup H$.

Példák infimumra és szuprémumra

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmaz. Ha a halmaz korlátos, akkor mind a szuprémuma mind az infimuma valós szám. Ha a halmaz nem üres, és felülről nem korlátos, akkor a szuprémuma ∞. Hasonlóan, ha nem üres, és alulról nem korlátos, akkor az infimuma $-\infty$. Első ránézésre logikusnak látszik, hogy egy halmaz szuprémuma sosem kisebb, mint az infimuma. Azonban gondoljuk végig mit mond a definíció, ha a halmaz üres. Az üres halmaz esetén minden számra teljesül, hogy nagyobb vagy egyenlő, mint a halmaz összes eleme, vagyis az üres halmaznak minden szám felső korlátja. A felső korlátok közül a legkisebb pedig a $-\infty$ lesz. Vagyis az üres halmaz szuprémuma $-\infty$. Hasonlóan az is teljesül minden valós számra, hogy kisebb vagy egyenlő, mint a halmazban lévő elemek. Így a az üres halamaz infimuma ∞. Ezt a speciális esetet leszámítva az infimum és a szuprémum valójában nem más, mint a halmaz minimumának és maximumának általánosítása, utóbbiak ugyanis nem mindig léteznek. Vizsgáljuk meg, a korlátos intervallum esetét. Legyen $A = (a, b]$. Ekkor a halmaznak maximuma b, minimuma viszont nem létezik. Az a nem a halmaz minimuma, mert az a nem eleme a halmaznak. Ezzel szemben az a infimuma az A halmaznak.

Sorozatok

Részsorozat

4. Definíció

Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor a (b_n)-t az (a_n) részsorozatának tekintjük, ha létezik olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, melyre

$$b_n = a_{f(n)}.$$

Legyen például $a_n = \frac{1}{n}$, ekkor a $b_n = \frac{1}{2n}$ az a_n részsorozata, az $f(n) = 2n$ választással. Hasonlóan részsorozat a $c_n = \frac{1}{n^2}$, az $f(n) = n^2$ választással.

2. Tétel

Legyen (a_n) olyan valós sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ahol $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Tegyük fel továbbá, hogy (b_n) részsorozata (a_n)-nek. Ekkor $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Alkalmazás

Ismeretes, hogy az Euler-féle e szám nem más, mint az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke, ha n tart végtelenbe. Az előző tétel alapján tudjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ sorozat határértéke is e. Mindezek alapján, ha például $\left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n}\right)^n$ sorozat határértékére vagyunk kiváncsiak, akkor a következő átalakításokat végezzük:

$$\left(\frac{n + \frac{1}{3}}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} \to e^{\frac{1}{3}}.$$

Részsorozatok határértéke

Korábban láttuk, hogy nem minden sorozatnak létezik határértéke. Nézzük például a következő sorozatot:

$$a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & \text{ha } \ n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \\ 6 + \dfrac{1}{n} & \text{ha } \ n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Ennek a sorozatnak nincs határértétéke. Egyértelmű az is azonban, hogy van olyan részsorozata, amelyik 1-hez és olyan is, amelyik 6-hoz tart.

5. Definíció

Legyen a_n tetszőleges sorozat, és vegyük ennek a sorozatnak az összes részsorozatát. A részsorozatok határérétékei közül a legkisebbet a sorozat limesz inferiorjának, a legnagyobbat pedig a limesz szuperiorjának nevezzük. A fenti fogalmak jelölése rendre:

$$\liminf a_n; \quad \limsup a_n.$$

3. Tétel
Legyen a_n tetszőleges számsorozat. Ekkor a sorozatnak egyértelműen létezik a limesz inferiorja és a limesz szuperiorja. Egy sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke, ha a sorozat limesz inferiorja és a limesz szuperiorja megyegyzik, és ekkor

$$\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n.$$

A limesz inferior és szuperior fogalma inkább elméleti, mint gyakorlati jelentőségű. Egyes tételek általánosabban is megfogalmazhatók ezekkel a fogalmakkal, hiszen ekkor tetszőleges sorozatra igaz lehet az állítás, és nem kell megkövetelni, hogy létezzen a a sorozatnak határértéke. A gyakorlatban általában ezeket a tételeket olyan sorozatokra alkalmazzuk, amelyeknek létezik határétéke, és az utolsó tételünk alapján ilyenkor elegendő ezt a határértéket megkereseni.

Deriválás és integrálás

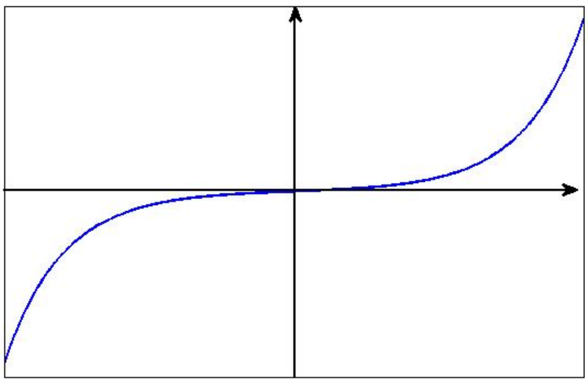
Deriválási szabályok

Ahhoz, hogy az összes deriválási szabályt áttekinthessük, először is be kell vezetnünk néhány új függvényt. Ezeket a függvényeket hiperbólikus függvényeknek nevezzük.

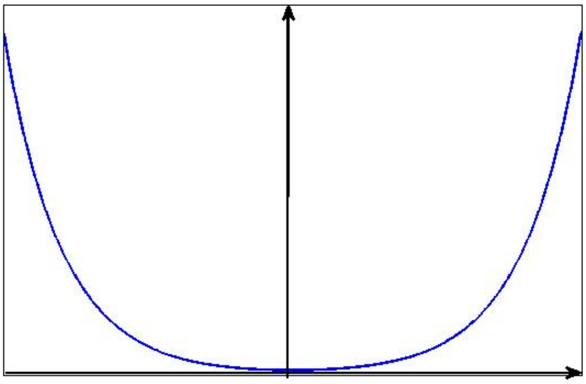
$$\begin{aligned} \mathrm{sh}x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \mathrm{ch}x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \mathrm{th}x &= \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \\ \mathrm{cth}x &= \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} \end{aligned}$$

A hiperbólikus függvények sok szempontból hasonlítanak a trigonometrikus függvényekre. Ahogy a trigonometrikus függvények esetében, úgy ezen függvényekneknél is érdemes definiálni az inverzet, amik rendre: $\mathrm{arsh}x$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\mathrm{arch}x$ $[1; \infty) \to \mathbb{R}$; $\mathrm{arth}x$ $(-1; 1) \to \mathbb{R}$ függvények.

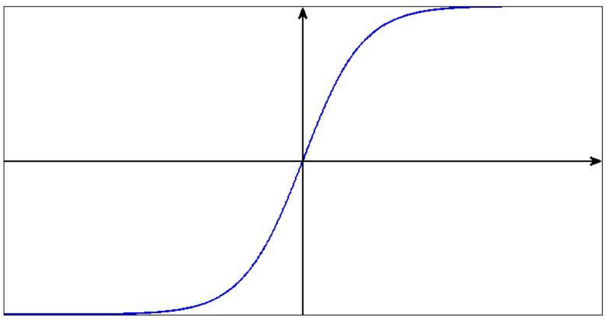
A $\mathrm{sh}x$



A $\mathrm{ch}x$



A th$x$



Függvények deriváltjai:

- $[x^a]' = ax^{a-1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
- $[e^x]' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$
- $[a^x]' = a^x \ln a$ $x \in \mathbb{R}$, $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$
- $[\sin x]' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\cos x]' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{tg}x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $k\pi \neq x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $[\mathrm{ctg}x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{\pi}{2}k\pi \neq x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$
- $[\mathrm{arctg}x]' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{arcctg}x]' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

- $[\mathrm{sh}x]' = \mathrm{ch}x,\ x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{ch}x]' = \mathrm{sh}x,\ x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{th}x]' = 1 - \mathrm{th}^2 x,\ x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{cth}x]' = 1 - \mathrm{cth}^2 x,\ 0 \neq x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{arsh}x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x \in \mathbb{R}$
- $[\mathrm{arth}x]' = \frac{1}{1-x^2},\ x \in (-1;1)$

Deriválás és műveletek:

- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ Speciális esetben:
  - $[(g(x))^a]' = ag(x)^{a-1}g'(x);\ a \in \mathbb{R}$
  - $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x)$
  - $[\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)};\ g(x) > 0$

Integrálási szabályok

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ (x > 0,\quad -1 \neq \alpha \in \mathbb{R})$
- $\int e^x dx = e^x + c\ (x \in \mathbb{R})$
- $\int x^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\ (x \in \mathbb{R}, 1 \neq a > 0)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c\ (x > 0 \text{ vagy } x < 0)$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c\ (x \in \mathbb{R})$
- $\int \cos x dx = \sin x + c\ (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + c\ (k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}\quad k \in \mathbb{Z})$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}x + c\ (k\pi \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsin}x + c\ (-1 < x < 1)$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \mathrm{arsh}x + c\ (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c = \quad = \begin{cases} \mathrm{arch}x + c\ (1 < x \in \mathbb{R}) \\ -\mathrm{arch}(-x) + c\ (1 > x \in \mathbb{R}) \end{cases}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}x + c\ (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c = \begin{cases} \mathrm{arcth}x + c\quad (1 > |x| \in \mathbb{R}) \\ \mathrm{arccth}x + c\quad (1 > |x| \in \mathbb{R}) \end{cases}$

- $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + c \ (x \in \mathbb{R})$
- $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + c \ (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth} x + c \ (0 \neq x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{ch^2 x} dx = \mathrm{th} x + c \ (x \in \mathbb{R})$

Integrálás és műveletek:

- $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$
- $\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$
- $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du; \ u = g(x)$