

GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június



Gazdaságmatematika középfeladó szinten

9. hét

Racionális törtfüggvények integrálja

Lovics Gábor

Polinomok és egész számok

Az egész számok és a polinomok halmaza

Az egész számok és a polinomok halmaza között nagyon sok hasonlóság van, abban az értelemben, hogy ugyanolyan műveletekre nézve zártak. Két egész szám összege vagy különbsége egész szám, ahogyan a polinomok összege vagy különbsége is polinom. Ugyanígy két egész szám szorzata is egész szám, ahogyan két polinom szorzata is polinom, és ez a három művelet rendelkezik a szokásos műveleti tulajdonságokkal is. Két egész szám hányadosa azonban már nem feltétlenül lesz egész, ahogy két polinom hányadosa sem lesz minden esetben polinom. (Azokat a halmazokat, amelyeken ilyen típusú műveleteket tudunk végezni, az algebrában gyűrűknek nevezzük.) Ezt kihasználva, nagyon sok eredmény egy az egyben átvihető az egész számok halmazáról a polinomokra. A valós együtthatós polinomok halmazát ezután $\mathbb{R}[x]$ -szel jelöljük, és legyen $p \in \mathbb{R}[x]$ $p \neq 0$ esetén $gr(p)$ a polinom foka.

A maradékos osztás

1. Tétel

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ekkor egyértelműen létezik $q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = qb + r$ és $|b| > |r|$.

2. Tétel

Legyen $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$, $p_2 \neq 0$. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $q, r \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, melyekre $p_1 = p_2q + r$ és $gr(p_1) > gr(r)$ vagy $r = 0$.

A tétel alapján számos fogalom vihető át az egész számokról a polinomok halmazára, mint például oszthatóság, prím tulajdonság, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös stb.

A maradékos osztás egy speciális esete

Ha egy gyűrűn értelmeztük a maradékos osztást, akkor az oszthatóság fogalmát is értelmezni tudjuk, hiszen azt mondhatjuk, hogy az egyik polinom osztója egy másiknak, ha a maradékos osztás során a maradék 0. Ilyenkor lényegében szorzattá bontottuk az eredeti polinomunkat. Speciálisan ezért megvizsgálható, hogy egy első fokú polinom osztója-e egy magasabb fokú polinomnak. Ennek a kérdésnek a vizsgálata nem más mint, a polinom egy gyökének megkeresése. Tegyük fel ugyanis, hogy egy $p(x)$ polinomnak osztója $x - a$ elsőfokú polinom, ahol a egy valós szám. Ekkor tudjuk, hogy $p(x) = (x - a)q(x)$, ahol $q(x)$ egy harmadik polinom. A jobboldalnak nyilván gyöke az a , de akkor a baloldalnak is gyöke kell legyen.

A maradékos osztás a gyakorlatban

Nem csak a tétel mondható ki nagyon hasonlóan a polinomok és az egész számok körében, de a maradékos osztás írásban nagyon hasonlóan végezhető el mindkét gyűrűben. Ezért most egy konkrét példán felelevenítjük, hogy hogyan is oszthatunk el maradékosan két számot egymással írásban. Osszuk el a 38 625-öt 8-cal.

$$38625 : 8 =$$

Balról jobbra haladunk. A 3-at 8-cal osztva 0-t kapunk, ezért az első szám, amit tényleg vizsgálunk a 38.

$$\begin{array}{r} 38625 : 8 = 4 \\ 6 \end{array} \quad (38 - 4 \cdot 8 = 6)$$

A maradék mellé lemásoljuk a következő számjegyet, így azt vizsgáljuk, hogy a 26-ban hányszor van meg a 8.

$$\begin{array}{r} 38625 : 8 = 48 \\ 66 \\ 2 \end{array} \quad (66 - 8 \cdot 8 = 2)$$

Az eljárást tovább folytatva a következőket kapjuk:

$$\begin{array}{r} 38625 : 8 = 482 \\ 66 \\ 22 \\ 6 \end{array} \quad (22 - 2 \cdot 8 = 6)$$

$$\begin{array}{r} 38625 : 8 = 4828 \\ 66 \\ 22 \\ 65 \\ 1 \end{array} \quad (65 - 8 \cdot 8 = 1)$$

Az eredmény alapján tehát

$$38625 = 8 \cdot 4828 + 1.$$

Most pedig egy másik példán megnézzük, hogyan végezhetjük el nagyon hasonlóan ugyanezt a műveletet polinomok között. Nézzük a következőt:

$$(x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) =$$

Az osztásnál a legnagyobb kitevőjű tagokat vesszük figyelembe. Ebben az esetben az osztandó legnagyobb kitevős tagja x^5 , az osztójé x^2 . Ezért az eredménypolinom legnagyobb kitevőjű tagja x^3 lesz. Szorozzuk a kapott tagot az osztóval: $x^3(x^2 + x - 1) = x^5 + x^4 - x^3$. Az így kapott polinomot vonjuk ki az osztandóból, vagyis $x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x - 2 - (x^5 + x^4 - x^3) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2$. Az eljárást ezzel a polinommal kezdjük előről. Az egészet röviden a következőképpen jelölhetjük.

$$\begin{array}{r} (x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 \\ 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2 \end{array}$$

Ezúttal a $2x^4$ -et és az x^2 -et kell figyelembe venni. Ez alapján az eredménypolinom következő tagja $2x^2$. Szorozzuk megint vissza az osztandó polinomot, és végezzük el a kivonást is. Így a következő alakhoz jutunk.

$$\begin{array}{r} (x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 \\ 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ -3x^3 + x - 2 \end{array}$$

Az eljárást folytatva a következő alakokhoz jutunk.

$$\begin{array}{r} (x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 - 3x \\ 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ -3x^3 + x - 2 \\ 3x^2 - 2x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
(x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 - 3x + 3 \\
2x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2 \\
-3x^3 + x - 2 \\
3x^2 - 2x - 2 \\
- x + 1
\end{array}$$

Az eredményünk alapján tehát:

$$x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 2 = (x^2 + x - 1)(x^3 + 2x^2 - 3x + 3) + (-x + 1).$$

Parciális törtekre bontás

Racionális törtfüggvények

Legyen $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor a $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ alakú függvényeket racionális törtfüggvényeknek nevezük. Célunk meghatározni a racionális törtfüggvények primitív függvényeit. Először is feltehető, hogy $gr(p_2(x)) > gr(p_1(x))$. Ugyanis, ha ez nem így lenne, akkor a polinomosztást felhasználva tudjuk, hogy $p_1(x) = p_2(x)q(x) + r(x)$, ebből

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \int q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)} = \int q(x) + \int \frac{r(x)}{p_2(x)}.$$

Az utolsó formában a két integrálból az első egy egyszerű polinom integrálása, a második pedig olyan racionális törtfüggvény, ahol a számláló foka alacsonyabb, mint a nevezőjé.

A törtek átalakítása

3. Tétel

Legyen $p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $p_2(x)$ felbontható első- és másodfokú polinomok szorzatára.

Ezek alapján a következő alakba írható át az integrálandó:

$$\frac{p_1(x)}{(x - u_1)^{\alpha_1} \dots (x - u_n)^{\alpha_n} (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (a_kx^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}}.$$

4. Tétel

Legyen egy racionális törtfüggvény a fenti formában adott. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_l \in \mathbb{R}$ számok ($m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, l = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k$), melyre a fenti alakban adott racionális törtfüggvény a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}
& \frac{A_1}{(x - u_1)} + \frac{A_2}{(x - u_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - u_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_m}{(x - u_n)^{\alpha_n}} + \\
& + \frac{B_1x + C_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \frac{B_2x + C_2}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots \\
& + \frac{B_{\beta_1}x + C_{\beta_1}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_lx + C_l}{(a_kx^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}}.
\end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás a gyakorlatban

A következő példán bemutatjuk, hogy a gyakorlatban hogyan végezhető el a parciális törtekre bontás. Először azokat az A, B, C számokat keressük, melyekre teljesül, hogy

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)(x + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2}.$$

Az összefüggés jobb oldalát közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Láthatjuk, hogy az ebben a formában felírt törtnek a nevezője azonos az eredetivel. Ezért a továbbiakban elegendő a számlálóval foglalkoznunk. A számlálóban felbontva a zárójeleket, majd a megfelelő tagokat kiemelve kapjuk, hogy

$$(A+B)x^2 + (4A+B+C)x + 4A - 2B - C.$$

Ezt az eredményt az eredeti tört számlálójával összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}A + B &= 1 \\4A + B + C &= 1 \\4A - 2B - C &= -1.\end{aligned}$$

Ha a második két egyenletet összeadjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}8A - B &= 0 \\8A &= B.\end{aligned}$$

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}A + 8A &= 1 \\A &= \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Amiből visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$B = \frac{8}{9} \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{9(x-1)} + \frac{8}{9(x+2)} - \frac{-1}{3(x+2)^2}.$$

Most keressük azokat az A, B, C számokat, melyekre az teljesül, hogy

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}.$$

Hasonlóan az előzőekhez először közös nevezőre hozzuk:

$$\frac{A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2)},$$

majd a nevezőben felbontjuk a zárójeleket, és kiemeljük a megfelelő tagokat:

$$(A+B)x^2 + (C-B)x + 2A - C.$$

Az eredeti tört nevezőjével ezt összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}A + B &= 1 \\C - B &= 1 \\2A - C &= -1.\end{aligned}$$

Az első két egyenletet összedva kapjuk, hogy

$$A + C = 2.$$

Ehhez a harmadik egyenletet hozzáadva adódik, hogy

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ A &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ezek után visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$B = \frac{2}{3} \quad C = -\frac{5}{3}.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)(x^2 + 2)} = \frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2x + 5}{3(x^2 + 2)}.$$

Integrálási szabályok

Integrálás

A parciális törtekre bontás során tehát a következő alakú racionális törtfüggvényekhez juthatunk:

$$\begin{aligned} &\frac{C}{x - a} \\ &\frac{C}{(x - a)^k} \\ &\frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c} \\ &\frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^k}, \end{aligned}$$

ahol C, D, a, b, c tetszőleges valós, k pedig egynél nagyobb egész szám. Az ilyen alakú függvények integrálásához a következőkre van szükségünk:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x - a} &= \ln|x - a| + c \\ \int \frac{dx}{(x - a)^k} &= \frac{1}{-k + 1} \frac{1}{(x - a)^{k-1}} + c \\ \int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + a) + B - \frac{Aa}{2}}{x^2 + ax + b} = \\ &= \int \frac{A}{2} \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} + \int \frac{C}{x^2 + ax + b} = \\ &= \int \frac{A}{2} \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} + \int \frac{C}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}} = \\ &= \ln(x^2 + ax + b) + \frac{1}{D} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + a}{2D} \right) + c, \end{aligned}$$

ahol $C = B - \frac{Aa}{2}$; $D = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$. Az utolsó integráltípus meghatározásához egy kicsit általánosabb tételt kell alkalmaznunk.

5. Tétel

Legyen $r(x) = x^2 + ax + b$ és $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\int \frac{g(x)}{r^m(x)} dx = \frac{A(x)}{r^{m-1}(x)} + \int \frac{B(x)}{r(x)},$$

ahol $A(x)$ egy $(2m - 3)$ -ad fokú, $B(x)$ pedig elsőfokú polinom.

Az $A(x)$ és $B(x)$ meghatározásához írjuk fel a polinomokat ismeretlen együtthatókkal, majd deriváljuk a tételben felírt egyenletet.

Feladat

Határozzuk meg a következő integrált

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2} dx$$

Megoldás

A feladat megoldható lenne a parciális törtekre bontással is, azonban most alkalmazzuk a fenti tételt. Mivel ebben a példában $m = 2$, ezért $1 = 2m - 3 = m - 1$, vagyis az $A(x)$ első fokú polinom, és az integrálon kívüli tag nevezője is elsőfokon szerepel. Ez alapján a tétel a következő formában írható fel

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 2} dx.$$

Deriváljuk az összefüggés mindkét oldalát:

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{A(x^2 + 2) - (Ax + B)2x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}.$$

A jobboldalt hozzuk közös nevezőre

$$\frac{A(x^2 + 2) - (Ax + B)2x + (Cx + D)(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2},$$

majd bontsuk fel a számlálóban szereplő zárójeleket és emeljük ki a megfelelő tagokat:

$$Cx^3 + (D - A)x^2 + (2C - 2B)x + 2A + 2D.$$

Ezt az eredeti tört számlálójával összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ D - A &= 1 \\ 2C - 2B &= 3 \\ 2A + 2D &= -2. \end{aligned}$$

Az első egyenletet a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy

$$B = -\frac{1}{2}.$$

A második és a negyedik egyenletekből pedig adódik, hogy

$$A = -1, \quad D = 0.$$

Összegezve tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2)^2} dx &= \frac{-x - \frac{1}{2}}{x^2 + 2} + \int \frac{x}{x^2 + 2} dx = \\ &= \frac{-x - \frac{1}{2}}{x^2 + 2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + c. \end{aligned}$$