GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

11. hét

Többváltozós differenciálegyenletek

Lovics Gábor

Alapfogalmak

Többváltozós differenciálegyenletek

Előfordul, hogy egy függvény deriváltja nem csak önmagától, hanem egy másik függvénytől is függ. Például kétváltozós esetben:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y, t)\\ \dot{y} &= G(x, y, t).\end{aligned}$$

Ilyenkor többváltozós differenciálegyenletről beszélünk. Magasabb rendű differenciálegyenletekről beszélünk, ha az egyenlet bal oldalán nem az első, hanem egy magasabb rendű derivált szerepel. Egy másodrendű differenciálegyenlet a következő alakban írható fel:

$$\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t).$$

A magasabb rendű egyenletek visszavezethetőek alacsonyabb rendű, többváltozós egyenletekre. Az előbbi másodrendű egyenlet felírható például a következő alakban:

$$\begin{aligned}y &= \dot{x}\\ \dot{y} &= F(y, x, t).\end{aligned}$$

Ezért az általános megoldási eljárások és a numerikus módszerek a többváltozós egyenletekre koncentrálnak. Többváltozós esetben is értelmezhetőek és fontosak az autonóm differenciálegyenletek, és kétváltozós esetben fázisdiagram is készíthető. Ezeknek is az a lényegük, hogy a t explicit módon nem kerül bele az egyenletbe, vagyis a következő alakban írhatók fel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y)\\ \dot{y} &= G(x, y).\end{aligned}$$

Ebben az esetben is értelmezhető az egyensúly, illetve a stabilitás, lényegében ugyanúgy, mint egyváltozós esetben, csak a fogalmakat kétdimenziós vektorokra kell átültetnünk.

Autonóm differenciálegyenletek

Kétváltozós autonóm lineáris differenciálegyenletek

Fontos speciális eset a kétváltozós lineáris differenciálegyenlet. Az ilyen feladatokat érdemes vektoros alakba átírni. Jelölje $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, és legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ekkor a feladat a következő alakban írható fel:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Ezek a feladatok analitikusan is megoldhatók, számunkra viszont sokkal érdekesebbek az egyensúlyi pontok és azok stabilitásának vizsgálata. Az egyensúlyi pontok megkereséséhez elegendő az $A\mathbf{x} = 0$ lineáris, homogén egyenlet megoldása. Tudjuk, hogy A reguláris, akkor ennek egyetlen megoldása az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ha az A szinguláris, akkor lesz egy origón átmenő egyenes, melynek minden pontja egyensúlyi pont, illetve ha A minden eleme nulla, akkor minden pont egyensúlyi pont.

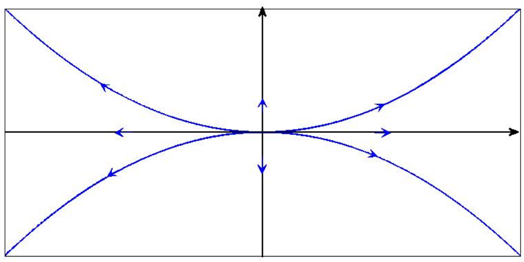
Stabilitás és sajátértékek

Ahhoz, hogy a kapott egyensúlyi pont stabilitását vizsgálni tudjuk, az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait kell megvizsgálnunk. Alapvetően három esetet különböztetünk meg.

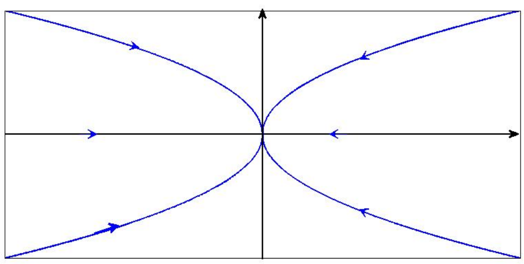
1. Az A mátrixnak két különböző sajátértéke van (λ, μ); vagy egy sajátértéke van (λ), amihez tartozik két lineárisan független sajátvektor.
2. Az A mátrixnak egy valós sajátértéke van (λ) és ahhoz csak lineárisan független sajátvektor tartozik.
3. Az A mátrixnak két komplex sajátértéke van: $\alpha + \beta i$, és $\alpha - \beta i$.

A három esetet további alesetekre bonthatjuk.

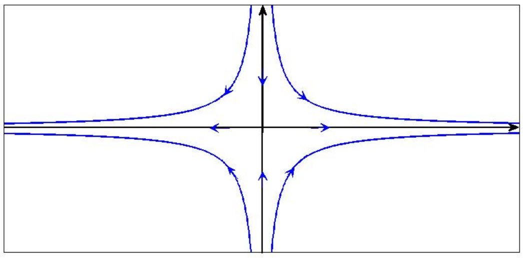
1. (a) Ha mindkét sajátérték pozitív, akkor instabil csomópontnak nevezzük.
   (b) Ha mindkét sajátérték negatív, akkor stabil csomópontról beszélünk.
   (c) Ha a sajátértékek előjele különböző, akkor nyeregpontról beszélhetünk. Ez az eset különösen fontos a közgazdasági elemzésekben. Ahogy azt az ábrán is láthatjuk, ebben az esetben van egy speciális pálya, ami stabil, vagyis ami az egyensúlyi ponthoz konvergál, a többi instabil. Ha tehát a rendszerünk gazdasági folyamatokat modellez, és képesek vagyunk választani valamilyen módon a pályák között, akkor értelmes az a kérdés, hogy a választásunk stabil-e vagy sem.



1.1 instabil csomópont

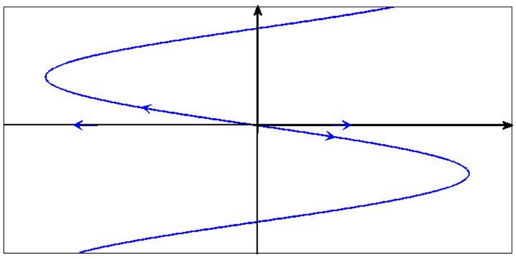


1.2 stabil csomópont

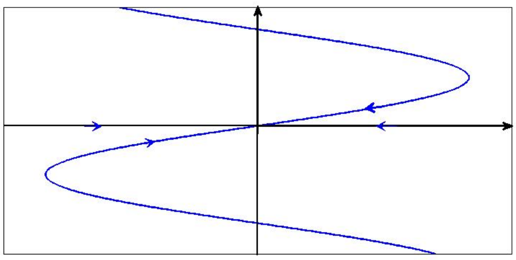


1.3 nyeregpont

2. (a) Ha az egy darab sajátérték pozitív, akkor instabil elfajult csomópontról beszélünk.
   (b) Ha az egy darab sajátérték negatív, akkor stabil elfajult csomópontról beszélünk.

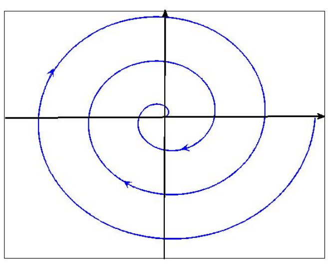


2.1 instabil elfajúlt csomópont

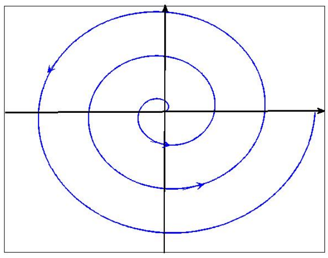


2.2 stabil elfajúlt csomópont

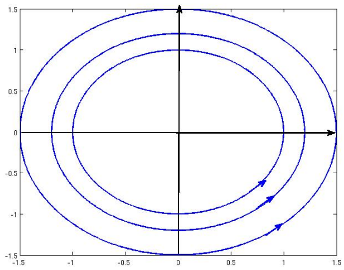
(a) Ha a komplex sajátérték valós része negatív, akkor stabil fokóuszpontról beszélünk.
(b) Ha a komplex sajátérték valós része pozitív, akkor instabil fokúszpontról beszélünk.
(c) Ha a komplex sajátérték valós része nulla, akkor örvénypontról vagy centrumról beszélünk.



3.1 stabil fókusz



3.2 instabil fókusz



3.3 centrum

Fázisdiagram

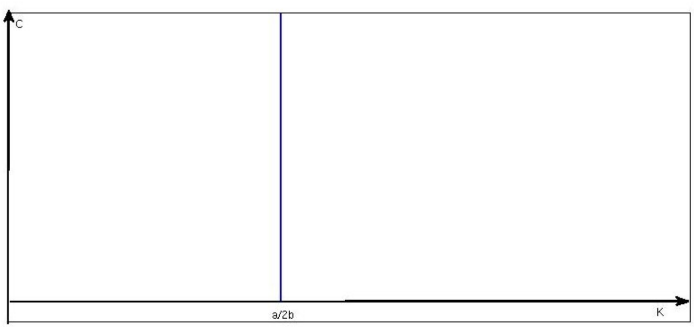
Példa többváltozós differenciálegyenlet fázisdiagramjára

Egy gazdasági modell megoldása a következő differenciálegyenlet-rendszerre vezet

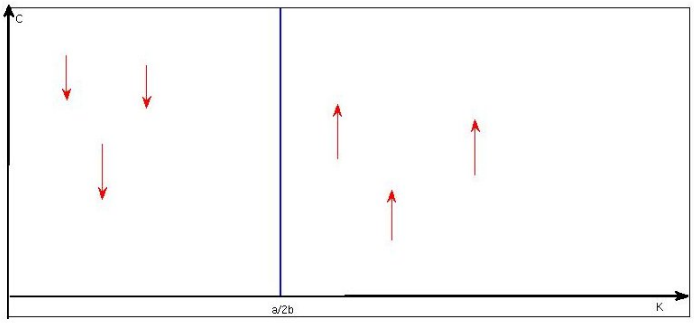
$$\dot{C} = w(a - 2bK)C$$
$$\dot{K} = aK - bK^2 - C,$$

ahol a, b, w pozitív paraméterek, K a tőke, C pedig a fogyasztást jelentő változók, vagyis ezek is pozitívak. Az egyensúlyi pont megkereséséhez és stabilitásának elemzéséhez nézzük meg, hol lesznek az a változók külön külön stacionáriusak. Az első egyenlet vizsgálata a $\dot{C} = 0$ pontok megkeresésére szolgál.

$$w(a - 2bK)C = 0$$
$$a - 2bK = 0$$
$$K = \frac{a}{2b}$$



Ezekben a pontokban tehát a C értéke nem változik, ami geometriailag azt jelenti, hogy az ábrán jelölt függőleges egyenesen függőleges irányú mozgást nem végez a pont. De mi történik a C-vel, ha nem vagyunk rajta ezen az egyenesen? Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor $K > \frac{a}{2b}$. Ilyenkor $\dot{C} = w(a-2bK) < 0$, vagyis ebben az esetben a C monoton csökken. Ez azt jelenti, hogy ezekben a pontokban a függőleges irányú elmozdulás lefelé történik. Amikor $K < \frac{a}{2b}$, akkor viszont $\dot{C} = w(a-2bK) > 0$, vagyis ekkor C monoton növekszik, így a függőleges irányú elmozdulás ekkor felfelé történik.

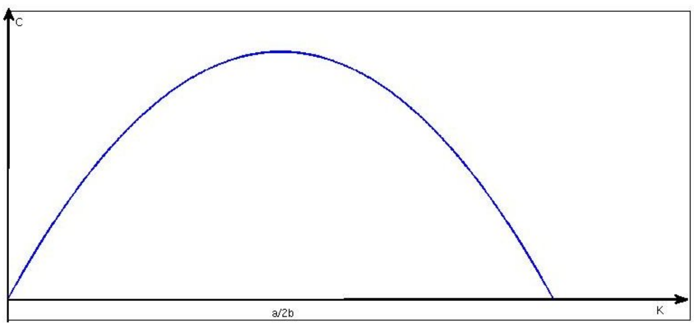


Most a második egyenlet vizsgálatával nézzük meg, hogy melyek azok a pontok, melyekben $\dot{K} = 0$. Az egyenleteink alapján ez akkor teljesül, ha

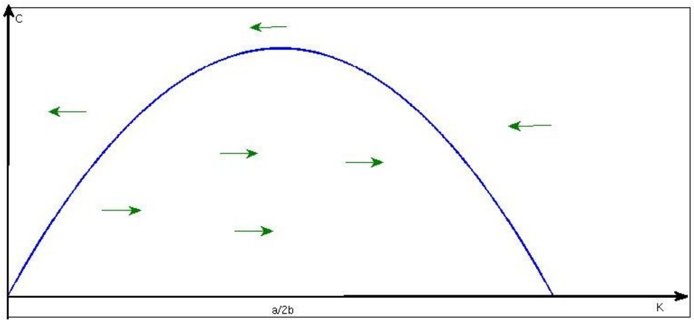
$$0 = aK - bK^2 - C$$
$$C = K(a - bK).$$

Az összefüggés alapján elmondható, hogy a K, C koordinátarendszerben a pontok, melyek kielégítik ezt az összefüggést, a következő tulajdonségokkal rendelkeznek.

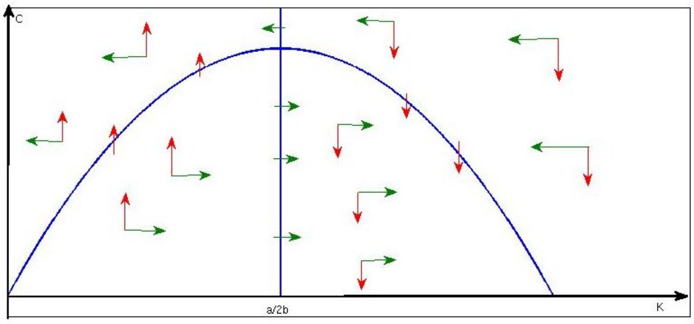
- Lefelé néző parabolát alkotnak.
- A parabola zérushelyei a $K = 0$ és a $K = \frac{a}{b}$.
- A parabola csúcspontja a $K = \frac{a}{2b}$-ben vétetik fel.



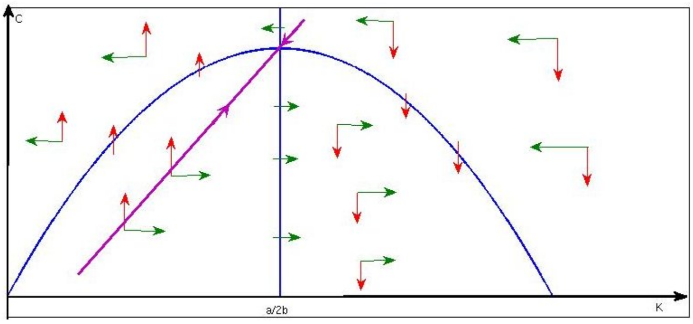
A parabolán tehát a pontok nem végeznek vízszintes irányú mozgást. Most vizsgáljuk, meg mi történik akkor, ha nem a parabolán helyezkedik el egy pont. Először nézzük meg, ha a parabola felett van egy pont, vagyis ha $C > aK - bK^2$. Ekkor $\dot{K}aK - bK^2 - C < 0$, vagyis a K monoton csökkenő, tehát a vízszintes irányban balra mozdolunk. Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a parabola alatt vagyunk, vagyis amikor $C < ak - bK^2$. Ekkor $\dot{K}aK - bK^2 - C > 0$, vagyis a K monoton növekedő, tehát a vízszintes irányban jobbra mozdulunk.



Az elemzés folytatásához lényegében nem kell más tennünk, mint hogy a két kapott ábrát egy közös koordinátarendszerben ábrázoljuk.



Az ábrát a két görbe négy részre osztja. Ezekben a részekben a pontok mind más-más irányba haladnak. Azt is leolvashatjuk, hogy a pontok a függőleges egyenesen éppen vízszintesen fognak áthaladni, míg a parabolán éppen függőlegesen. Az összes többi pontban valamiféleképpen ferde irányban mozognak a pontok, az ábrának megfelelő módon. Az is egyből látható az ábráról, hogy a jobb felső és a bal alsó részből van esélye a pontoknak közelebb jutni az egyensúlyi ponthoz. Valóban a két síknegyed között húzodik az egyetlen stabil pálya, tehát ez is egy nyeregpont típusú dinamikai rendszer.



Az eredmény közgazdasági értelmezése

Eddig csak arra koncenráltunk, hogy a kapott dinamikai rendszert matematikai és geometriai szempontból értelmezzük. Most kicsit gondoljunk bele a változók közgazdasági tartalmába. Ha megoldunk egy rendszert ez azt jelenti, hogy ha valaki megad egy kezdő (K, C) koordínátát, akkor tudjuk, hogy onnantól hogyan viselkedik a pont. Matematikailag nyilván nincs különbség a két változó között, de ne felejtsük el, hogy az egyik változó a tőkét, a másik a fogyásztást jelöli. A két változó közgazdasági tartalma azért különböző, mert a rendelkezésünkre álló tőke egy adott időpillanatban külső, megváltoztathatatlan adottság a számunkra, leginkább korábban hozott döntéseink eredménye. Azt, hogy mennyit fogyasztunk, viszont teljesen szabadon dönthetjük el. Adott tőkeszint mellé tehát megkereshetjük azt a fogyasztási szintet (a kezdeti pillanatban), ami biztosítja számunkra, hogy az egyensúlyi pályán mozogjunk.

Mit kezdjünk a bonyolult modellekkel?

A gazdasági modellek gyakran a fentihez hasonló bonyolult differenciálegyenlet-rendszer megoldását igénylik. Láthatjuk, hogy ez elég nehéz, hiszen például még a fenti viszonylag egyszerű esetben is meglehetősen bonyolult lenne az egyensúlyi pálya pontos meghatározása, ha pedig több mint két változónk van, akkor még ábrázolni sem tudjuk a rendszerünket. Szerencsére azonban gyakran nincs szükségünk a feladat pontos megoldására. Ha a gazdasági ingadozásokat szeretném modellezni, akkor elegendő, ha közelítőleg meg tudom határozni, hogyan viselkedik a rendszer az egyensúly közelében. Ilyenkor a rendszert linearizáljuk, ha százalékos változásra vagyunk kiváncsiak akkor loglinarizáljuk, és ezt elemezzük.