GAZDASÁGMATEMATIKA KÖZÉPHALADÓ SZINTEN

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/a/KMR-2009-0041 pályázati projekt keretében
Tartalomfejlesztés az ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszékén
az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszék
az MTA Közgazdaságtudományi Intézet
és a Balassi Kiadó
közreműködésével

Készítette: Lovics Gábor

Szakmai felelős: Lovics Gábor

2010. június

ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék

Gazdaságmatematika középhaladó szinten

12. hét

Lineáris programozás

Lovics Gábor

Alapfogalmak

A lineáris programozási feladat

A feltételes optimalizálás legegyszerűbb esete az, amikor a korlátok és a célfüggvény is lineáris függvények segítségével vannak kifejezve. A feladat lehet minimalizálás vagy maximalizálás, mi az utóbbira építjük fel eredményeinket. A maximalizálási feladatokat a következő alakban írhatjuk fel:

$$\left.\begin{array}{c} \max c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + an_{22}x_2 \dots a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\} LP;$$

$$\left.\begin{array}{c} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}\right\} LP.$$

A feladat megoldásai

Legyen

$$\left.\begin{array}{c} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array}\right\} LP$$

lineáris programozási feladat, ahol $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ adottak. A feladat megengedett megoldásainak hívjuk azokat az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-eket, amelyekre $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ teljesül. Az $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ optimális megoldása a feladatnak, ha $\mathbf{x}^*$ megengedett megoldása a feladatnak, és nem létezik olyan megengedett megoldás, melyre $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ nagyobb, mint $\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$. Az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$ függvényt a feladat célfüggvényének nevezzük. A minimalizálási feladat mindig visszavezethető maximalizálási feladattá, ha a célfüggvényt minusz eggyel szorozzuk, a megengedett megoldások halmazát változatlanul hagyjuk. Az így kapott feladat optimális megoldása ugyanaz, mint az eredeti fealdaté (ha létezik), a célfüggvény optimális értéke pedig az eredeti feladat optimális célfüggvényértékének mínuszegyszerese.

A feladatok megoldhatósága

A feladatokat megoldhatóság szempontjából három csoportba sorolhatjuk.

- A feladatnak nincs optimális megoldása, mert a megengedett megoldások halmaza üres.
- A feladatnak nincs optimális megoldása, mert a megengedett megoldások halmaza nem üres és a célfüggvény nem korlátos felülről a megengedett megoldások halmazán.
- A feladatnak létezik optimális megoldása (egy vagy több).

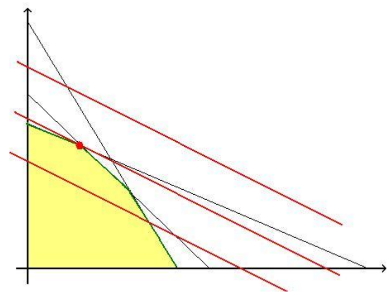
A feladatokat a gyakorlatban többféle módszerrel is megoldhatjuk. Abban az esetben, ha a feladat kétváltozós, ábrázolhatjuk a megengedett megoldások halmazát és a célfüggvények szintvonalát grafikusan, amiről leolvasható a megoldás. Ha több változónk van, akkor speciális eseteket leszámítva csak számítógépes algoritmusokkal oldható meg a probléma. Az ilyen jellegű problémákra ma már elég jó algoritmusok léteznek, sok ezer változó és több száz feltétel esetén is gyorsan megtalálják az optimális megoldást, vagy meg tudják mondani, ha nem létezik.

Grafikus megoldás

Példák feladatok grafikus megoldására

Nézzük meg néhány feladat grafikus megoldását:

$$\left.\begin{aligned} \max 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} LP1$$



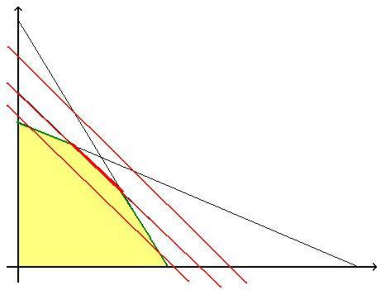
Az ábrán a piros vonalak jelölik a célfüggvény szintvonalait, a sárga terület a megengedett megoldások halmazát, a zöld vonalak a megengedett megoldások halmazának határát. Két szintvonal közül ahhoz tartozik a nagyobb függvényérték, amelyik meszebb van az origótól. Ezért a célunk az, hogy a megengedett megoldások halmazán az origótól legtávolabbi szintvonalra kerüljünk. Az ábrán leolvasható, hogy ez a piros pontban történik. (Az attól balra lefelé eső vonalat ugyan el tudjuk érni, de ez csökkentést jelent a célfüggvényen, a jobbra felfelé lévő szintvonal pedig nem metsz bele a megengedett megoldások halmazába.) Az ábráról tehát leolvasható, hogy a feladatnak egyértelmű megoldása van, mégpedig az első két korlát metszéspontjában. Így az optimális hely meghatározható, mint az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása. Ami nem más, mint az $x_1 = 4$, $x_2 = 4$. Most nézzük meg a

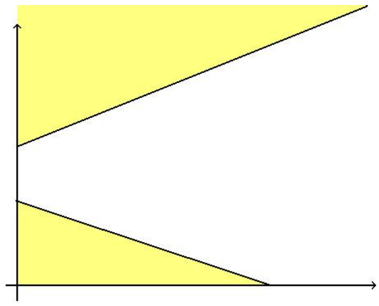
$$\left.\begin{aligned} \max x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} LP2$$

feladatot:



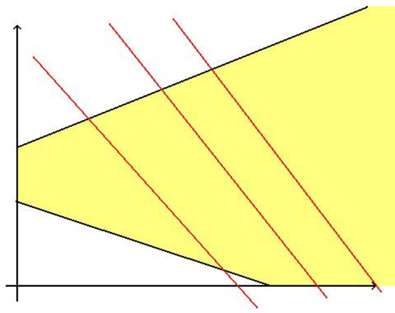
Ennek a feladatnak is létezik megoldása, de az már nem egyértelmű. Az ábrán vastag pirossal jelölt szakasz összes pontja optimális megoldása a feladatnak. Vizsgáljuk meg a következő feladatot:

$$\left.\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_1 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} LP3$$



Az ábrán ezúttal a sárga terület nem a megengedett megoldások halmazát mutatja, hanem azt, hogy mely pontok teljesítik az első, illetve a második egyenlőtlenségi kritériumot, külön külön (és mindkét esetben figyelembe vesszük a nemnegativitási kritériumokat is). Az ábrán láthatjuk, hogy ezeknek a metszete üres. Ez alapján tudjuk, hogy ennek a feladatnak nincs megengedett megoldása, így a feladat nem megoldható. Végezetül legyen az utolsó feladatunk a következő formában adott:

$$\left.\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} LP4$$



Ennek a feladatnak létezik ugyan megengedett megoldása, azonban láthatjuk, hogy a célfüggvény felülről nem korlátos a megengedett megoldások halmazán. Így ennek a feladatnak sincs optimális megoldása. Egy jó feltételes optimalizálási feladatot megoldó algoritmustól nem csak azt várjuk, hogy oldja meg a feladatot, ha meg lehet, hanem azt is, hogy ha nem lehet, akkor erre vonatkozóan szolgáltasson valamiféle bizonyítékot. Vagyis vagy mutassa meg, hogy a feladatnak nem létezik megengedett megoldása (ehhez, mint azt a későbbiekben látni fogjuk, elegendő arra bizonyítékot szolgáltatnia, hogy egy lineáris egyenletrendszernek nem létezik megoldása), vagy mutassa meg, hogy a célfüggvény nem korlátos a megengedett megoldások halmazán. Ez általában úgy megy, hogy az algoritmus mutat egy megengedett megoldást, és egy olyan irányt, amin az algoritmus a végtelenségig tud nőni, ha a pontból kiindulunk.

Dualitás

A duális feladat

1. Definíció
Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrix, és* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *vektorok adottak,* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ *pedig ismeretlen vektorok. Ekkor egy*

$$\left.\begin{aligned} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}\right\} LP$$

lineáris programozási feladat duál feladatán a következő problémát értjük:

$$\left.\begin{aligned} \min \mathbf{b}'\mathbf{u} \\ A'\mathbf{u} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{u} \ge \mathbf{0} \end{aligned}\right\} DP.$$

Dualitás tételek

1. Tétel (gyenge dualitás tétel)
Tegyük fel, hogy adott egy LP primál és egy DP duál lineáris programozási feladat pár. Jelölje P *a primál,* D *pedig a duál feladat megengedett megoldásainak halmazát, és tegyük fel, hogy* $P \ne \emptyset$, $D \ne \emptyset$. *Ekkor* $\forall \mathbf{x} \in P$ *és* $\forall \mathbf{u} \in D$ *esetén*

$$\mathbf{c}'\mathbf{x} \le \mathbf{b}'\mathbf{u}.$$

2. Tétel (erős dualitás tétel)
Tegyük fel, hogy adott egy LP primál és egy DP duál lineáris programozási feladat pár. Ekkor, ha LP-nek létezik véges optimális megoldása, akkor a DP-nek is létezik véges optimális megoldása, és a két célfüggvény optimális értéke megegyezik. Továbbá, ha a primál feladatnak létezik megengedett megoldása, de a célfüggvény nem korlátos felülről a megengedett megoldások halmazán, akkor a duál feladatnak nem létezik megengedett megoldása.

Hasznos jelölés

$$\begin{array}{ccccc} & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \le & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ & \geq & & \\ & \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} & & \end{array}$$

Egyenlőségi kritériumok és előjelkötetlen változók

A fenti tételek két szempontból speciálisak. Az egyik, hogy csupa egyenlőtlenségi kritérium szerepel benne, a másik, hogy minden változóról kikötöttük, hogy nem lehet negatív. Megmutatjuk, hogy ezek nem valódi megkötések, a feladatoknak ezek a sajátosságai tetszőlegesen átalakíthatóak, ahogy nekünk a legkényelmesebb. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha adott egy olyan feladat, amiben egyenlőségi feltétellel határoztuk meg a megengedett megoldások halmazát:

$$\left.\begin{aligned} \max x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} P.$$

Ez a feladat nyilván ekvivalens a következővel:

$$\left.\begin{aligned} \max x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 - x_2 \leq -5 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} P'.$$

Utóbbinak már fel tudjuk írni a duálisát, hiszen erre már alkalmazhatóak a fenti tételeink:

$$\left.\begin{aligned} \min 5u_1 - 5u_2 \\ 2u_1 - 2u_2 \geq 1 \\ u_1 - u_2 \geq 3 \\ u_1; u_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} D'.$$

Ha jobban megnézzük ezt a feladatot, akkor láthatjuk, hogy érdemes bevezetni egy új változót, legyen $u = u_1 - u_2$. Mivel u_1, és u_2 nemnegatív számok, ezért u-ra már nincs előjelmegkötésünk. Ennek az új változónak a segítségével a duál feladat tehát a következő alakba írható át:

$$\left.\begin{aligned} \min 5u \\ 2u \geq 1 \\ u \geq 3 \end{aligned}\right\} D.$$

Mivel a vesszős feladatok ekvivalensek az eredetiekkel, ezért P-nek a duális párja éppen a D lesz. Vagyis azt láthatjuk, hogy ha az eredeti feladatunkban szerepelt egy egyenlőségi feltétel, akkor ezt egyrészt minden gond nélkül át tudjuk írni egyenlőtlenséges feltételre, másrészt az egyenlőségi feltételhez a duális feladatban egy előjelkötetlen változó fog szerepelni. Mivel a primál és duál feladatok szimmetrikusak, ezért ez visszafelé is igaz lesz, vagyis ha az eredeti feladatunkban szerepel egy olyan változó, amelyre nincs előjelmegkötés, akkor annak a duálisában egyenlőségi feltételek szepelnek majd. Azt is megmutatjuk, hogy ha az eredeti feladatban egyenlőtlenségi feltételek vannak, akkor azok is visszavezethetőek egyenlőségi feltételekké. Ehhez csak egy új, előjelkötött változót kell bevezetnünk. Például az

$$x_1 - 3x_2 \leq 8$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + s = 8 \\ s \geq 0 \end{aligned}$$

rendszerrel. Az, hogy melyik rendszerre térünk át, attól függ, hogy mit szeretnénk később csinálni. A különböző algoritmusok például különböző formájú felírásokból indulhatnak ki, és egyes elméleti eredményeket is könnyebb speciális formákra bizonyítani.

Dualitás és árnyékárak

A közgazdaságtanban a duális változók optimális értékét gyakran úgynevezett árnyékárakként értelmezzük. Ha célunk például a profitunkat maximalizálni bizonyos korlátok között, akkor az i-edik korláthoz tartozó duálváltozó azt fogja megmutatni, hogy ha az erőforrásunk kis mértékben változik, akkor ez mennyiben változtatja majd a célfüggvényünk értékét. (Ha a duálváltozó optimális értéke u_i^* és a korlát jobboldalát Δb-vel változtatjuk, akkor a célfüggvényünk értékének változása $\Delta z^* = \Delta b \cdot u_i^*$ lesz.) Az, hogy az egyenlőséges feltételhez csak nemnegatív árnyékár tartozhatott logikus, hiszen a korlát baloldalának növelése egyértelműen növeli a lehetőségeinket. Ha viszont egyenlőtlenséges kritériumot vizsgálunk, akkor a baloldalának növelése nem jelent egyértelműen lehetőségbővülést. Ez nem csak azt jelenti már, hogy többet használhatunk fel az egyes erőforrásokból, hanem azt, hogy többet kell felhasználnuk belőlük, és ez nem feltélenül fogja növelni a célfüggvény értékét, így az árnyékárunk lehet akár negatív is.

A dualitás tétel általános alakja

Legyenek A,B,C D mátrixok és $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ vektorok adottak (és olyan méretűek, hogy a következő műveletek értelmesek legyenek). Jelölje a primál feladat előjelkötött változóit $\mathbf{x} \geq 0$ és előjel kötetlen váltzói pedig $\mathbf{y}$. Ekkor egy lináris programozási feladat általános primál feladata a következő formában épül fel:

$$\left.\begin{aligned} \max \mathbf{c}_1'\mathbf{x} + \mathbf{c}_2'\mathbf{y} \\ A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \leq \mathbf{b}_1 \\ C\mathbf{x} + D\mathbf{y} = \mathbf{b}_2 \end{aligned}\right\} ALP.$$

Ekkor a feladat duáljának változói $\mathbf{u} \geq 0$ előjelkötött és $\mathbf{v}$ előjelkötetlen válozókból állnak, és a következő alakban írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \max \mathbf{b}_1'\mathbf{u} + \mathbf{b}_2'\mathbf{v} \\ A\mathbf{u} + C\mathbf{v} \geq \mathbf{c}_1 \\ B\mathbf{u} + D\mathbf{v} = \mathbf{c}_2 \end{aligned}\right\} ADP.$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} & & \\ \begin{array}{c}\mathbf{u}\\ \geq\\ \mathbf{0}\end{array} & \text{A} & \text{B} & \leq & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{v} & \text{C} & \text{D} & = & \mathbf{b}_2 \\ & \geq & = & & \\ & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & & \end{array}$$

Komplementaritás

Egy LP feladat visszavezetése LCP-re

Az árnyékárak fogalmát végiggondolva, könnyen belátható, hogy egy egyenlőtlenségi kritériumhoz pontosan akkor tartozik nulla ha az nem teljesül egyenlőtlenséggel. Ha valamelyik erőforrásunkból amúgy is több van, mint amennyit felhasználunk, annak bővűlése nem növeli a profitunkat.

3. Tétel (komplementaritás)
Tegyük fel, hogy adott egy primál-duál feladatpár, melynek optimális megoldáspárja $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$. *Ekkor* $i = 1, 2, \ldots, n$ *és* $j = 1, 2, \ldots, m$ *esetén,*

$$u_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j}x_1^* + a_{2j}x_2^* + \cdots + a_{nj}x_n^* = b_j; \qquad (*)$$

$$x_i^* > 0 \Rightarrow a_{1i}u_1^* + a_{2i}u_2^* + \cdots + a_{mi}x_n^* = c_i. \qquad (**)$$

Megfordítva, ha $\mathbf{x}^*$ *primál,* $\mathbf{u}^*$ *duál megengedett megoldások, melyekre teljesül* $(*)$ *és* $(**)$*, akkor* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$ *optimális megoldáspárja a primál-duál feladatpárnak.*

Ahhoz, hogy megértsük, hogy mit jelent a komplementáris kifejezés, érdemes a tételt kicsit más alakba átírni. Írjuk át az egyenlőtlenséggel felírt primál feladatot egyenlőségessé:

$$\left.\begin{aligned} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} LP,$$

$$\left.\begin{aligned} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} LP'.$$

A második felírás azért szemléletesebb a mi szempontunkból, mert az eredeti felírásban az i-edik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, ha $s_i = 0$ a második felírásban. Legyen egy lineáris programozási feladat optimális primál-duál megoldáspárja $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*$. Előbbihez a primál feladat vesszős felírásában tartozik egy $\mathbf{s}^*$. Ekkor a tételünk alapján, ha $u_i^* > 0 \Rightarrow s_i^* = 0$. Ez azt jelenti, hogy az optimális megoldásban ha $\mathbf{u}$ valamelyik koordinátájában nem 0, akkor az $\mathbf{s}$ abban a koordinátájában 0. Ezt értjük az alatt, hogy két vektor komplementáris viszonyban áll egymással.